უ. გოგინავა, ა. დანელია, თ. კოპალიანი, გ. ნადიბაიძე

კ ა ლ კ უ ლ უ ს ი

პროგრამა **MAPLE**-ის გამოყენებით

სალექციო კურსი

თბილისი 2007

1. სიმრავლის ცნება. რიცხვითი სიმრავლეები

სიმრავლის ცნება. სიმრავლის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მათემატიკის, როგორც მეცნიერების ერთ-ერთი განმარტება: მათემატიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის გარკვეულ სტრუქტურებს სიმრავლეებზე. კალკულუსის კურსში ჩვენ მხოლოდ ამ ცნების აღწერით დავკმაყოფილდებით. **სიმრავლე არის გარკვეულ ობიექტთა ერთობლიობა**. აღნიშნულ კურსში სიმრავლე და ობიექტთა ერთობლიობა სინონიმებია. ობიექტებს, რომლებიც მოცემულ სიმრავლეში შედიან, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. სიმრავლეები ჩვეულებრივ დიდი ლათინური ასოებით აღინიშნებიან: $A, B, C, D, \ldots$, ხოლო სიმრავლის ელემენტები – პატარა ლათინური ასოებით: $a, b, c, d, \ldots,$. თუ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ ჩავწერთ: $a \in A$. ჩანაწერი “$a \notin A$” ან “$a \overline{\in} A$” ნიშნავს, რომ a ელემენტი არ ეკუთვნის A სიმრავლეს.

მაშასადამე, როდესაც სიმრავლეზე ვლაპარაკობთ, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ყოველი საგნის მიმართ სწორია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი ორი შესაძლებლობიდან: საგანი ან შედის მოცემულ ერთობლიობაში როგორც მისი ელემენტი, ან არა.

> მაგალითი 1. 1. ვთქვათ, N არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. მაშინ განსაზღვრების ძალით $2 \in N$, ხოლო $\dfrac{2}{3} \notin N$.

თუ A სიმრავლე შედგება მხოლოდ $a, b, c, d, \ldots$, ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტებისაგან, მაშინ A-თვის გამოიყენება აღნიშვნა $A = \{a, b, c, d, \ldots\}$. მაგალითად, თუ 1, 5, 9 არის A სიმრავლის ელემენტები და ის სხვა ელემენტს არ შეიცავს, მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ $A = \{1,5,9\}$. შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ მოყვანილი განმარტების თანახმად, ჩანაწერი $\{1,5,9,5\}$ არ წარმოადგენს კორექტულ ჩანაწერს, ვინაიდან 5 როგორც ობიექტი არსებობს მხოლოდ ერთი და ის ჩვენს ერთობლიობაში უნდა შევიდეს ერთხელ. ჩანაწერი $\{1,2,\{2\}\}$ ცხადია სიმრავლეს წარმოადგენს, რომელიც შეიცავს სამ ელემენტს. (შევნიშნოთ, რომ 2 და $\{2\}$ სხვადასხვა ობიექტებია.)

კალკულუსის კურსში ძირითადად საქმე გვექნება რიცხვით სიმრავლეებთან. საზოგადოდ ეს სიმრავლეები შეიძლება იყოს საკმაოდ რთული აგებულების, განსხვავებით ზემოთ მოყვანილი სიმრავლისა, რომლის ყველა ელემენტის უბრალოდ ჩამოთვლა შეგვიძლია. ხშირად გამოვიყენებთ სიმრავლის მოცემის ასეთ წესს: **დავასახელებთ რაიმე თვისებას, რომელსაც აკმაყოფილებს აღსაწერი ერთობლიობის ყველა წევრი და მხოლოდ ისინი.**

ვთქვათ, P რაიმე თვისებაა, რომელიც გააჩნია გარკვეული ტიპის ობიექტებს, მაშინ ამ თვისების მქონე ყველა ობიექტთა A სიმრავლე ასე აღინიშნება:

$$A=\{x\ |x-\text{ს აქვს } P \text{ თვისება }\}$$

მაგალითი 1. 2 $\{x\ |x>0\ \}$ წარმოადგენს ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლეს.

მაგალითი 1. 3 $\{x\ |x^2-1=0\ \}=\{-1;1\}$

სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიელი სიმრავლე ეწოდება. იგი $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი სიმრავლე A და B. A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ნაწილი, ანუ ქვესიმრავლე, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლეს ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში წერენ $A\subset B$ ან $B\supset A$. ეს იკითხება ასე: A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში. **ცარიელი სიმრავლე ყოველი A სიმრავლის ქვესიმრავლედ ითვლება.** (იმისათვის, რომ ეს წინადადება სავსებით ცხადი გახდეს, საკმარისია ზემოთ მოყვანილი განმარტება ასეთი სახით გამოითქვას: A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ქვესიმრავლე, თუ $x\notin B$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $x\notin A$.)

მაგალითი 1. 4 განვიხილოთ სიმრავლე $A=\{a,b,c\ \}$. სიმრავლეები $\varnothing$, $\{a\ \}$, $\{b\ \}$, $\{c\ \}$,$\{a,b\ \}$, $\{a,c\ \}$, $\{b,c\ \}$, $\{a,b,c\ \}$ A სიმრავლის ქვესიმრავლეებია.

ვთქვათ, A და B ისეთი სიმრავლეებია, რომ $A\subset B$ და $B\subset A$. მაშინ ვიტყვით, რომ A და B ტოლი სიმრავლეებია და ვწერთ: $A=B$.

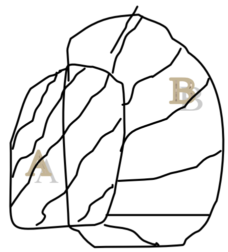
მაგალითი 1. 5 ვთქვათ, $A=\{1,5,9\ \}$ და $B=\{5,1,9\ \}$. ცხადია, რომ $A=B$.

მაგალითი 1. 6 ვთქვათ, $A=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\ \}$, $B=\{2,3\ \}$ და $C=\{y\,|\,(\sin y+5)(y-2)(y-3)=0\ \}$. ცხადია, რომ $A=B=C$.

სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ იგი სასრული რაოდენობის ელემენტებისგან შედგება. მაგ.: $A=\{1,7,9\}$ სასრული სიმრავლეა.

არაცარიელ სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი სასრული არაა. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არის უსასრულო სიმრავლის მაგალითი.

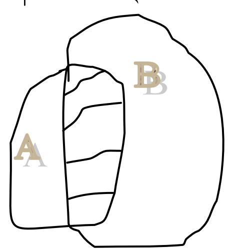
მოქმედებები სიმრავლეებზე. ვთქვათ მოცემულია ორი, A და B სიმრავლე. A და B სიმრავლეების გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნიან. A და B სიმრავლეების გაერთიანება აღინიშნება $A\cup B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A\cup B=\{x\ |x\in A \text{ ან } x\in B\ \}$.



$A\cup B$

მაგალითი 1. 7 $A=\{1,7,9\}$, $B=\{1,7,10,11\}$ $A\cup B=\{1,7,9,10,11\}$.

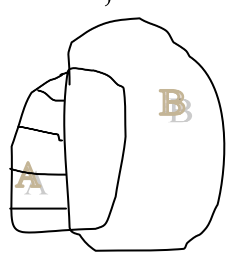
A და B სიმრავლეების **თანაკვეთა** ეწოდება ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან როგორც A ისე B სიმრავლეს. A და B სიმრავლეების თანაკვეთა აღინიშნება $A\cap B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ და } x\in B\}$.



$A\cap B$

მაგ.ალითი 1. 8 $A=\{1,7,9\}$, $B=\{1,7,10,11\}$ $A\cap B=\{1,7\}$

A და B სიმრავლეების **სხვაობა** ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტებისაგან შემდგარ სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან. A და B სიმრავლეთა სხვაობა აღინიშნება $A\setminus B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ და } x\notin B\}$.



$A\setminus B$

მაგალითი 1. 9. $A=\{1,7,9\}$, $B=\{1,7,10,11\}$ $A\setminus B=\{9\}$

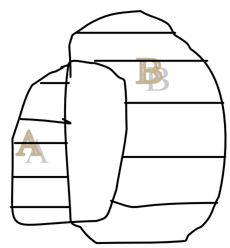
შენიშვნა 1. 1. საზოგადოდ $(A\setminus B)\cup B\neq A$

მაგალითი 1. 10. $A=\{1,7,9\}$, $B=\{17,10,11\}$. ცხადია, რომ $A\setminus B=\{9\}$, მაგრამ $(A\setminus B)\cup B=\{1,5,9,10,11\}\neq A$.

სიმრავლეთა გაერთიანება და თანაკვეთა ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ არამარტო ორი, არამედ რამდენიმე სიმრავლისათვის. ვთქვათ, გვაქვს რამდენიმე სიმრავლე. ამ სიმრავლეთა **გაერთიანება** ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნიან ერთ-ერთს მაინც მოცემული სიმრავლეებიდან. აღნიშვნა: $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ ან $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ სიმრავლეთა **თანაკვეთა** ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის ყველა მოცემულ სიმრავლეს. აღნიშვნა: $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n$ ან $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

A და B სიმრავლეების **სიმეტრიული სხვაობა** ეწოდება $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ სიმრავლეს. A და B სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა აღინიშნება ასე: $A \Delta B$. განმარტებით $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



მაგალითი 1. 11

$A = \{1,7,9\}, B = \{1,7,10,11\}$

$A \setminus B = \{9\}, B \setminus A = \{10,11\}$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{9,10,11\}$

ვთქვათ, M რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა და $A \subset M$. $C_M A$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $M \setminus A$ სიმრავლეს და ვუწოდებთ A სიმრავლის დამატებას M სიმრავლემდე: $C_M A = M \setminus A$.

დებულება*. (დე მორგანის კანონები) ვთქვათ, $A \subset M$ და $B \subset M$. სამართლიანია ტოლობები

$$C_M(A \bigcup B) = C_M A \bigcap C_M B,$$

$$C_M(A \bigcap B) = C_M A \bigcup C_M B.$$

დავამტკიცოთ პირველი მათგანი:

ავიღოთ ნებისმიერი x ელემენტი $C_M(A \bigcup B)$ სიმრავლიდან. მაშინ $(x \in C_M(A \bigcup B)) \Rightarrow (x \in M$ და $x \notin A \bigcup B) \Rightarrow (x \in M, x \notin A$ და $x \in M, x \notin B) \Rightarrow (x \in C_M A$ და $x \in C_M B) \Rightarrow x \in (C_M A \bigcap C_M B)$.

მაშასადამე, $C_M(A \bigcup B) \subset C_M A \bigcap C_M B$.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი x ელემენტი $C_M A \bigcap C_M B$ სიმრავლიდან. მაშინ

$(x \in (C_M A \bigcap C_M B)) \Rightarrow (x \in C_M A$ და $x \in C_M B) \Rightarrow (x \in M, x \notin A$ და $x \in M, x \notin B) \Rightarrow (x \in M$ და $x \notin A \bigcup B) \Rightarrow \left(x \in C_M (A \bigcup B)\right)$. მივიღეთ:

$$C_M A \bigcap C_M B \subset C_M (A \bigcup B) \quad .$$

ჩვენს მიერ დამტკიცებული სიმრავლური ჩართვებიდან და სიმრავლეთა ტოლობის განმარტებიდან დავასკვნით პირველი ტოლობის სამართლიანობას.

ანალოგიურად დამტკიცდება მეორე ტოლობა.

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი. ვთქვათ a და b რაიმე ობიექტებია. სიმბოლოთი (a,b) ავღნიშნავთ დალაგებულ წყვილს, რომლის პირველი ელემენტია a და მეორე b. ვიტყვით, რომ ორი (a,b) და (c,d) დალაგებული წყვილი ტოლია მხოლოდ მაშინ როცა $a = c$ და $b = d$.

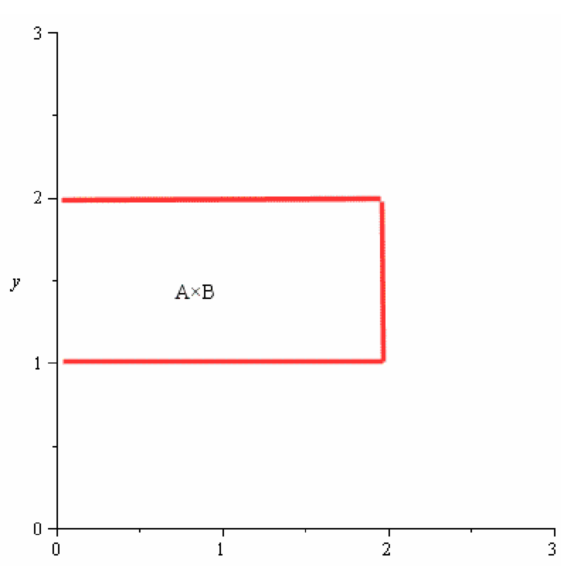
შენიშვნა. (a,b) და $\{a,b\}$ სხვადასხვა ობიექტებია.

ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლეები. ყველა შესაძლებელი დალაგებული (a,b) წყვილების სიმრავლეს, სადაც $a \in A, b \in B$ A და B სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი ეწოდება და $A \times B$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამგვარად, $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$. თუ $A = B$ მაშინ $A \times A$ ვუწოდებთ A სიმრავლის დეკარტულ კვადრატს და მას ავღნიშნავთ A^2 სიმბოლოთი.

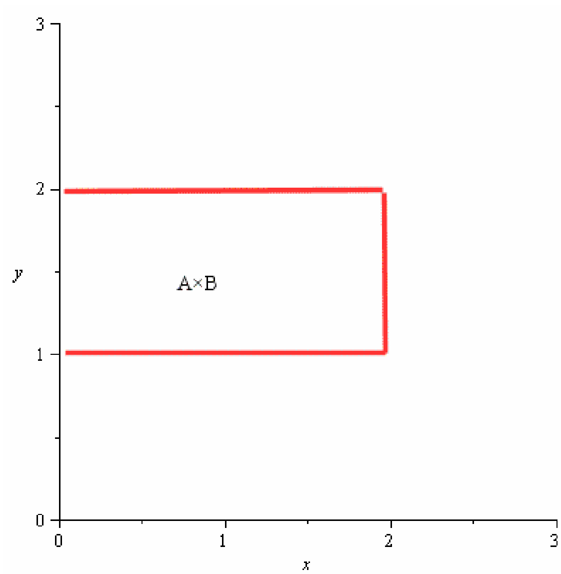
მაგალითი 1. 12 $A = \{1,7,9\}$, $B = \{1,7,10,11\}$

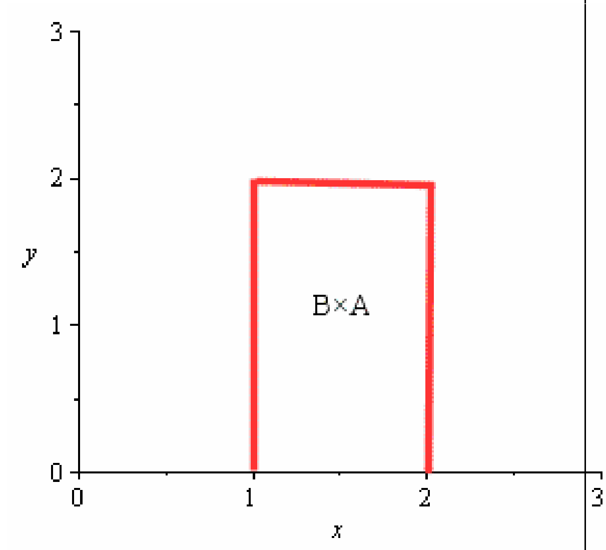
$A \times B = \{(1,1),(1,7),(1,10),(1,11),(7,1),(7,7),(7,10),(7,11),(9,1),(9,7),(9,10),(9,11)\}$.

მაგალითი 1. 13 $A = [0,2]$, $B = [1,2]$, მაშინ ამ სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლს შეგვიძლია მოუძებნოთ მარტივი ინტერპრეტაცია საკორდინატო სიბრტყეზე, თუ გავიხსენებთ, რომ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ (a,b) წყვილს სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი, რომლის პირველი კორდინატია a, ხოლო მეორე b.



შენიშვნა 1. 2. საზოგადოდ $A\times B\neq B\times A$. მართლაც, ვთქვათ $A=[0,2]$, $B=[1,2]$, მაშინ გვექნება





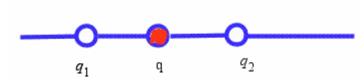
შევნიშნოთ, რომ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის განმარტების ძალით თუ მოცემული სიმრავლეებიდან ერთ-ერთი სიმრავლე ცარიელია მაშინ ნამრავლიც ცარიელი სიმრავლეა.

რიცხვითი სიმრავლეები. ქვემოთ ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი აღნიშვნებით:

$N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ -ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.
$Z=\{\ldots,-n,\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$ - მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

$Q=\{\frac{m}{n}\,|m\in Z,n\in N\}$ -რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს შემდაგი თვისება: ნებისმიერი $q_1,q_2\in Q$ რიცხვებისათვის მოიძებნება ერთი მაინც რაციონალური რიცხვი q ისეთი, რომ $q_1<q<q_2$. მართლაც, საკმარისია ავიღოთ $q=\frac{q_1+q_2}{2}$, მაშინ სამართლიანია $q_1<q<q_2$ უტოლობა.



განვიხილოთ რიცხვითი ღერძი, ანუ წრფე, რომელზეც არჩეული გვაქვს ათვლის სათავე, მასშტაბი (მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია) და დადებითი მიმართულება. მათემატიკის სასკოლო კურსიდან ცნობილია, რომ ყოველ რაციონალურ რიცხვს რიცხვით ღერძზე შეესაბამება გარკვეული წერტილი. მეორე მხრივ, რიცხვითი ღერძის გარკვეული წერტილები არ შეესაბამება რაციონალურ რიცხვებს, მაგალითად წერტილი, რომელიც წარმოადგენს იმ მონაკვეთის ბოლოს, რომლის მეორე ბოლო ათვლის სათავეშია, ხოლო სიგრძე ერთეულოვანი კვადრატის დიაგონალის ტოლია. ეს წერტილი შეესაბამება ირაციონალურ რიცხვს$-\sqrt{2}$, რომლის ჩაწერა $\frac{m}{n}$ წილადის საშუალებით შეუძლებელია. თუმცა, რიცხვითი ღერძის ყოველ წერტილს შეესაბამება სავსებით განსაზღვრული უსასრულო პერიოდული ან არაპერიოდული ათწილადი (თუ ათწილადი პერიოდულია პერიოდით 0 ან 9, მაშინ იგი სასრული ათწილადის სახით ჩაიწერება). რიცხვითი ღერძის ყველა წერტილის შესაბამისი რიცხვების ერთობლიობა წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. ყოველი ნამდვილი რიცხვი ჩაიწერება უსასრულო პერიოდული ან არაპერიოდული ათწილადის საშუალებით. ამასთან, სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადი წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვს, ხოლო უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი წარმოადგენს ირაციონალურ რიცხვს.

I -ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე.

$N \subset Z \subset Q, Q \cap I = \varnothing$.

R -ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. $R = Q \cup I$.

$Q \subset R$ და $I \subset R$.

ქვემოთ ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი სახის შუალედებით:

$[a,b] = \{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$- ჩაკეტილი მონაკვეთი (სეგმენტი).

$(a,b) = \{x \mid x \in R, a < x < b\}$- ღია მონაკვეთი (ინტერვალი).

$[a,b) = \{x \mid x \in R, a \le x < b\}$-. ნახევრად ღია მონაკვეთი

$(a,b] = \{x \mid x \in R, a < x \le b\}$- ნახევრად ღია მონაკვეთი.

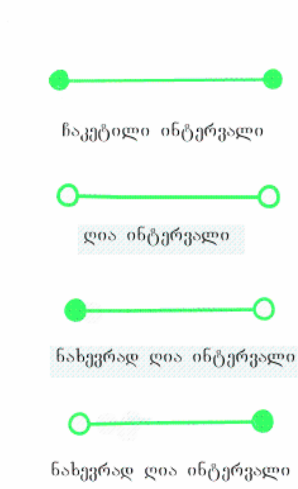
$[a,+\infty) = \{x \mid x \in R, a \le x\}$

$(a,+\infty) = \{x \mid x \in R, a < x\}$

$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R, x \le a\}$

$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R, x < a\}$

$(-\infty,+\infty) = R$



მოცემულ კურსში ვისარგებლებთ ცნობილი რიცხვითი უტოლობებით:

დებულება: ყოველი a,b ნამდვილი რიცხვებისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

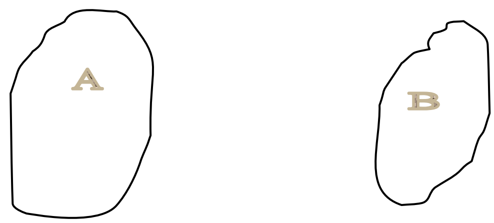
1) $|a+b| \le |a|+|b|$;   2) $||a|-|b|| \le |a-b|$.

სავარჯიშოები:

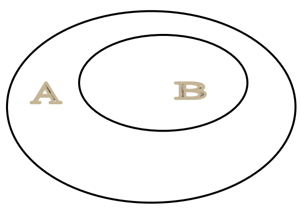
1. ვთქვათ, $A=\{1\}$ და $B=\{1,2\}$. ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი გამონათქვამები?
   ა) $A \subset B$; ბ) $1 \in A$; გ) $2 \in A$; დ) $2 \in B$; ე) $2 \subset B$; ვ) $A \in B$.
2. შეადგინეთ $A=\{1,3,7,9\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლეები:
3. ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეები:
   $A=\{1,2\}$, $B=\{\{1\},\{2\}\}$, $C=\{\{1\},\{1,2\}\}$ და $D=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$. ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი გამონათქვამები?
   ა) $A=B$; ბ) $A \subset B$; გ) $A \subset C$; დ) $A \in B$; ე) $A \in C$; ვ) $B \in D$.
4. იპოვეთ $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \Delta B,\ A \times B$, თუ
   ა) $A=\{1,2,5,9\}$, $B=\{2,9,7,5,1,6\}$
   ბ) $A=\{2n \mid n \in N\}$, $B=\{2n+1 \mid n \in N\}$
   გ) $A=(1,6)$, $B=[1,6]$
   დ) $A=(1,+\infty)$, $B=(-\infty,6]$
5. მოცემულია სიმრავლეები: $A=\{\ 1;\ 3;\ 4;\ \}$, $B=\{\ 3;\ 7;\ 9\ \}$, $C=\{\ 3;\ 8;\ 9\ \}$. იპოვეთ:
   ა) $(A \cup B) \cap C$;   ბ) $(A \setminus B) \times (B \setminus C)$;
   გ) $(A \cap B) \cup C$;   დ) $(A \cup B) \times (B \setminus C)$.
6. მოცემულია სიმრავლეები: $A=\{\ 3;\ 5;\ 8;\ \}$, $B=\{\ 8;\ 9;\ 11\ \}$, $C=\{\ 8;\ 10;\ \}$. იპოვეთ:
   ა) $(A \cup B) \cup C$;   ბ) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$;
   გ) $(A \cap B) \cap C$;   დ) $(A \cup B) \cap (B \setminus C)$.
7. მოცემულია სიმრავლეები: $A=\{\ 2;\ 4;\ 7;\ \}$, $B=\{\ 7;\ 8;\ 9\ \}$, $C=\{\ 7;\ 9;\ \}$. იპოვეთ:
   ა) $(A \cap B) \cup C$;   ბ) $(A \setminus B) \times (C \setminus B)$;
   გ) $(A \cup B) \cap C$;   დ) $(A \setminus B) \times (B \setminus C)$.
8. მოცემულია სიმრავლეები: $A=\{\ 5;\ 7;\ 8;\ \}$, $B=\{\ 7;\ 13\ \}$, $C=\{\ 7;\ 12;\ 13\ \}$. იპოვეთ:
   ა) $(A \cap B) \cup C$;   ბ) $(A \setminus B) \times (B \setminus C)$;
   გ) $(A \cup B) \cap C$;   დ) $(A \cap B) \times (B \cup C)$.
9. დაშტრიხეთ $A \times B$, თუ
   ა) $A=[1;3]$, $B=[-1;4]$;   გ) $A=(2;4)$, $B=(-2;1)$
   ბ) $A=[1;4)$, $B=(2;5]$;   დ) $A=[0;4]$; $B=(0;2)$.

10. დაშტრიხეთ $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A,\ A\Delta B$,თუ

ა)



ბ)



11. შეამოწმეთ ტოლობები:

ა) $A\cup A=A$; $A\cap A=A$;

ბ) $A\subset A\cup B$; $A\cap B\subset A$;

გ) $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$.

დ) $(A\setminus B)\cup B=A\cup B$.

12*. შეამოწმეთ ტოლობები:

ა) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$; ბ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

გ) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; დ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

ე) $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$;

13*. აჩვენეთ, რომ:

ა) თუ $A\subset C$ და $B\subset C$, მაშინ $A\cup B\subset C$;

ბ) თუ $C\subset A$ და $C\subset B$, მაშინ $C\subset A\cap B$;

გ) $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$;

დ) $A\setminus C\subset(A\setminus B)\cup(B\setminus C)$;

ე) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;

ზ) $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$.

14*. სამართლიანია თუ არა ტოლობები: ა) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$; ბ) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$; ვ) $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus B$?

15*. შეამოწმეთ ტოლობები.

ა) $C_M(C_M A)=A$;

ბ) $(A\subset C_M B)\Leftrightarrow(B\subset C_M A)$;

გ) $(A\subset B)\Leftrightarrow(C_M A\supset C_M B)$.

16*. შეამოწმეთ ტოლობები:

ა) $(A\times B)\cup(X\times B)=(A\cup X)\times B$;

ბ) $(A\times B)\cap(X\times Y)=(A\cap X)\times(B\cap Y)$.

გ) სამართლიანი არის თუ არა ტოლობა $(A\times B)\cup(X\times Y)=(A\cup X)\times(B\times Y)$?

17. დაშტრიხეთ სიმრავლეები ა) $\{x\,|\,4x+2\le 0\}$; ბ) $\{x\,|\,x^2-3x+2\le 0\}$;

გ) $\{x\,|\,\sin^2 x+\cos^2 x<-1\}$; დ) $\{x\,|\,x+\dfrac{1}{x}>2\}$; ე) $\{x\,|\,0<x^2-5x+6<6\}$;

ვ) $\{x\,|\,|5-3x|<1\}$.

2. ფუნქცია

ელემენტარული წარმოდგენები ფუნქციებზე

ფუნქციის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. აღნიშნული ცნების გასააზრებლად შევნიშნოთ, რომ ფიზიკური და გეომეტრიული კანონზომიერებები გამოისახება როგორც რიცხვებს შორის დამოკიდებულებები. პრაქტიკისათვის ამ თანაფარდობებს შორის მნიშვნელოვანია ისეთი დამოკიდებულებები, როდესაც ერთი სიდიდის რაიმე მოცემული მნიშვნელობით ცალსახად განისაზღვრება მეორე სიდიდის მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ ვიცით, რომ კვადრატის გვერდის სიგრძეა x, მაშინ მის ფართობს გამოვთვლით ცალსახად, ფორმულით $S=x^2$. სწორედ ეს ფორმულა გამოხატავს ფუნქციურ (ანუ ცალსახა) დამოკიდებულებას x ცვლადს (კვადრატის გვერდის სიგრძეს) და S ცვლადს (კვადრატის ფართობს) შორის. მაშასადამე კანონზომიერებები, რომლის დროსაც ერთი სიდიდის მნიშვნელობა ცალსახად განსაზღვრავს მეორე სიდიდის მნიშვნელობას, აღიწერებიან რიცხვითი ფუნქციებით.

ვთქვათ, E არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე არაცარიელი ქვესიმრავლე, ხოლო R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ვიტყვით, რომ E-სიმრავლეზე მოცემულია (განსაზღვრულია) ფუნქცია მნიშვნელობებით R სიმრავლეში, თუ მოცემულია f წესი, რომლის საშუალებითაც E სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება R სიმრალის ერთადერთი ელემენტი. აღნიშნულ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩავწერთ: $f:E\to R$ ან $E\xrightarrow{f}R$. E სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება, f-ს კი – ფუნქციის მოცემის წესი. ზოგად $x\in E$ ელემენტს ვუწოდებთ ფუნქციის არგუმენტს (ან დამოუკიდებელ ცვლადს). თუ არგუმენტის კონკრეტულ x_0 მნიშვნელობას მოცემული f წესით ეთანადება $y_0\in R$ რიცხვი, მაშინ y_0-ს ვუწოდებთ f ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში

და ჩავწერთ $y_0 = f(x_0)$. საზოგადოდ x არგუმენტისათვის კი ვწერთ $y = f(x)$. ამ შემთხვევაში y-ს დამოკიდებული ცვლადი ეწოდება. მაგალითად განვიხილოთ შემდეგი წესით მოცემული $f: R \to R$ ფუნქცია: $f(x) = x^2$. განმარტების თანახმად, განსაზღვრის არის ნებისმიერ x რიცხვს f წესით შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი, რომელიც უნდა დავითვალოთ ფორმულით $y = x^2$. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $y = x^2$ წესით, როგორც ზემოთ ვნახეთ შეგვიძლია დავითვალოთ კვადრატის ფართობი (x-კვადრატის გვერდია, ხოლო y კვადრატის ფართობი). ამ შემთხვევაში, ბუნებრივია, ამ წესით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს $(0,+\infty)$ შუალედი. (შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის x არგუმენტისა და დამოკიდებული y ცვლადის ნაცვლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვა ცვლადები მაგ. t და z. მაშინ t და z ცვლადებს შორის დამოკიდებულება ჩაიწერება ფორმულით $z = f(t)$.)

ზემოთთქმულიდან გამომდინარე, ფუნქციის მოცემა ნიშნავს, როგორც განსაზღვრის E არის მითითებას, ასევე f შესაბამისობის მოცემას. ხშირად ფუნქციის მოცემის დროს განსაზღვრის არეს არ უთითებენ (მაგალითად სკოლის უმრავლეს სახელმძღვანელოებში). ასეთ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არის ქვეშ გულისხმობენ ყველა იმ x რიცხვთა ერთობლიობას, რომელთათვისაც $f(x)$ გამოსახულებას აზრი აქვს. მაგალითისათვის თუ ვიტყვით, მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, განსაზღვრის არის მითითების გარეშე, მაშინ ვგულისხმობთ, რომ მისი განსაზღვრის არეა $R \setminus \{3\}$ სიმრავლე. **კალკულუსის მოცემულ კურსში ჩვენ ამ მიდგომით ვისარგებლებთ.**

ვთქვათ მოცემულია ორი $f: E \to R$ და $g: F \to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ ეს ფუნქციები ტოლია თუ მათი განსაზღვრის არეები ტოლი სიმრავლეებია; $E = F$ და ყოველი $x \in E$ რიცხვისათვის $f(x) = g(x)$. მაგალითად განვიხილოთ ორი ფუნქცია $f: R \to R$ მოცემული შემდეგი წესით: $f(x) = x^2$ და $g: [0,+\infty) \to R$ მოცემული შემდეგი წესით $g(x) = x^2$. ეს ფუნქციები ტოლი ფუნქციები არ არის, ვინაიდან მათი განსაზღვრის არეები ერთმანეთს არ ემთხვევა, თუმცა $f(x) = g(x) = x^2$, როცა $x \in [0,\infty)$.

განმარტება. ვთქვათ მოცემულია ორი ფუნქცია $f: E \to R$ და $g: F \to R$.
დაუშვათ $F \subset E$ და ყოველი $x \in F$ გვაქვს $g(x) = f(x)$ მაშინ ვიტყვით, რომ g ფუნქცია არის f ფუნქცის შეზღუდვა F სიმრავლეზე. (ასეთ შემთხვევაში შეიძლება უბრალოდ ასე ვთქვათ: f ფუნქცია F სიმრავლეზე ემთხვევა g ფუნქციას.)

აღნიშნული ტერმინოლოგიის მიხედვით კვადრატის გვერდის სიგრძის საშუალებით კვადრატის ფართობის დასათვლელი ფორმულა (ფუნქცია) არის $f(x) = x^2$ ფუნქციის შეზღუდვა დადებით რიცხვთა სიმრავლეზე. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი:

განვიხილოთ ფუნქციები $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ და $g(x)=x-1$. მათი განსაზრვრის არეები შესაბამისად არის $R\setminus\{-1\}$ და R, ამიტომ ეს ფუნქციები ერთმანეთის ტოლი არ არის, თუმცა თუ შევიზღუდებით $R\setminus\{-1\}$ სიმრავლეზე (ორივე ფუნქციის საერთო განსაზღვრის არეზე) მაშინ ისინი ერთმანეთის ტოლია.

როგორ ვიპოვოთ მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა განსაზღვრის არის ამა თუ იმ წერტილში? განვიხილოთ მაგალითი: ვთქვათ, $f(x)=x^2+2x$. ვიპოვოთ $f(2),\ f(x+5)$.

$f(2)=2^2+2\cdot 2=8$;

$f(x+5)=(x+5)^2+2(x+5)=x^2+12x+35$.

ფუნქციაზე მნიშვნელოვან ინფორმაციას გვაძლევს მისი გრაფიკი. მოვიყვანოთ ფუნქციის გრაფიკის განმარტება. ვთქვათ, $f:E\to R$ რაიმე ფუნქციაა. ამ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება ყველა შესაძლლებელი $(x,f(x))$ სახის წყვილისაგან შემდგარ სიმრავლეს, სადაც $x\in E$. f ფუნქციის გრაფიკი Γ_f –ით აღინიშნება. ამგვარად,

$$\Gamma_f=\{(x,y)|\ x\in E, y=f(x)\}=\{(x,f(x))|\ x\in E\}.$$

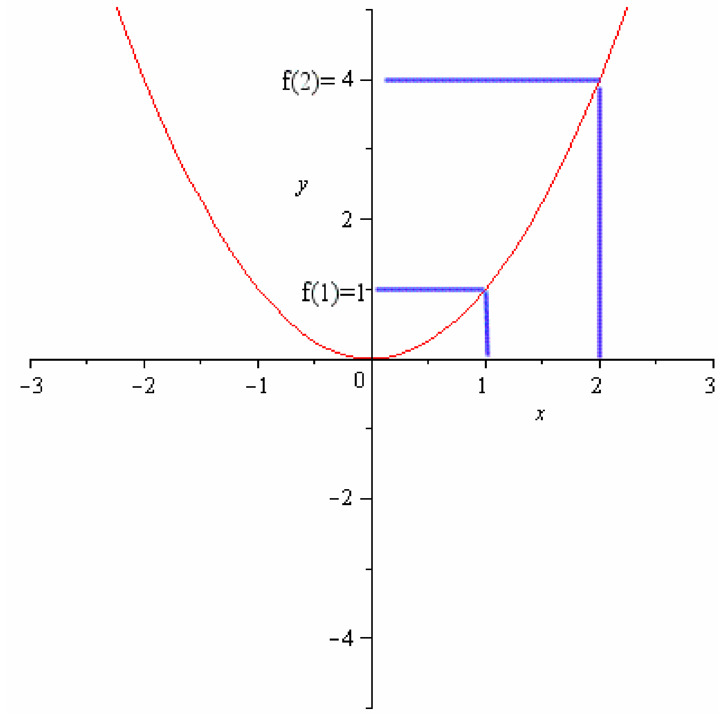
როგორც ვხედავთ, ფუნქციის გრაფიკი რიცხვთა წყვილებისაგან შემდგარი სიმრავლეა და ამიტომ ფუნქციის გრაფიკი $R\times R$ სიმრავლის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს. ეს საშუალებას გვაძლევს ფუნქციის გრაფიკი თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ, როგორც საკოორდინატო xoy სიბრტყის ქვესიმრავლე.

ქვემოთ მოვიყვანთ რამოდენიმე მნიშვნელოვან ცნებას და თვალსაჩინოებისათვის, ელემენტარული ფუნქციის მაგალითზე გავიაზრებთ მათ.

ვთქვათ მოცემულია $f:E\to R$ ფუნქცია. $f(E)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ სიმრავლეს რომელიც შედგება ყველა იმ y რიცხვებისაგან, რომლებისთვისაც არსებობს ერთი მაინც x რიცხვი განსაზღვრის არიდან ისეთი, რომ $f(x)=y$. მაშასადამე: $f(X)=\{y\in Y\,|\,\exists x, x\in X \quad \text{და} \quad y=f(x)\}$. $f(E)$ სიმრავლეს ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს (სიმრავლეს) უწოდებენ.

მოყვანილი განმარტებიდან შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ალგორითმი, იმისა თუ როგორ დავადგინოთ ფიქსირებული $y\in R$ რიცხვი ეკუთვნის თუ არა ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს . სახელდობრ, ფიქსირებული y რიცხვი ეკუთვნის ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა განტოლებას $f(x)=y$ (x ცვლადის მიმართ) აქვს ერთი მაინც ამონახსნი.

მაგალითი 2.1. $f:R\to R$, $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის, $\Gamma_f=\{(x,x^2)|\ x\in R\}$ ესკიზს, როგორც სკოლის კურსიდან ვიცით, აქვს სახე (იხ. ნახაზი). თვალსაჩინოებისთვის, მოცემული ფუნქციისათვის განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი ცნებებთან დაკავშირებული, რამდენიმე საკითხი.

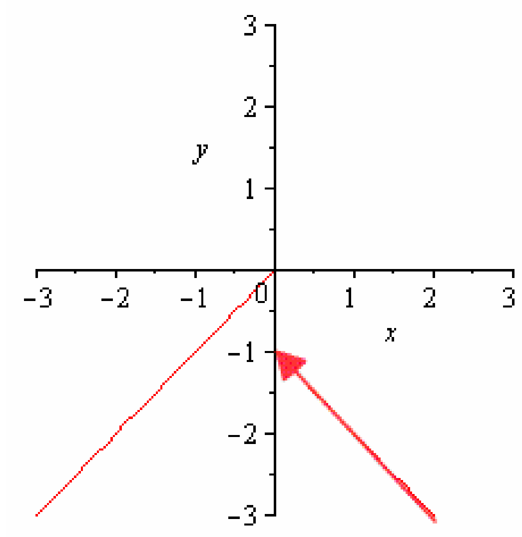


1) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, ანუ oy ღერძის პარალელური ყოველი წრფე ფუნქციის გრაფიკს კვეთს (ერთადერთ წერტილში).

2) ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა: $f(R) = [0,+\infty)$. მართლაც ვთქვათ რაიმე y_0 რიცხვი არის ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან. მაშინ $f(x) = y_0$ განტოლებას ანუ $x^2 = y_0$ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი ფუნქციის განსაზღვრის არიდან. ეს კი მოხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $y_0 \geq 0$. ყოველივე ზემოთთქმულს აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. სახელდობრ: ox ღერძის პარალელური წრფე $y = y_0$ კვეთს ფუნქციის გრაფიკს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $y_0 \geq 0$.

მაგალითი 2. 2. ვთქვათ ფუნქცია, მოცემულია შემდეგი სახით

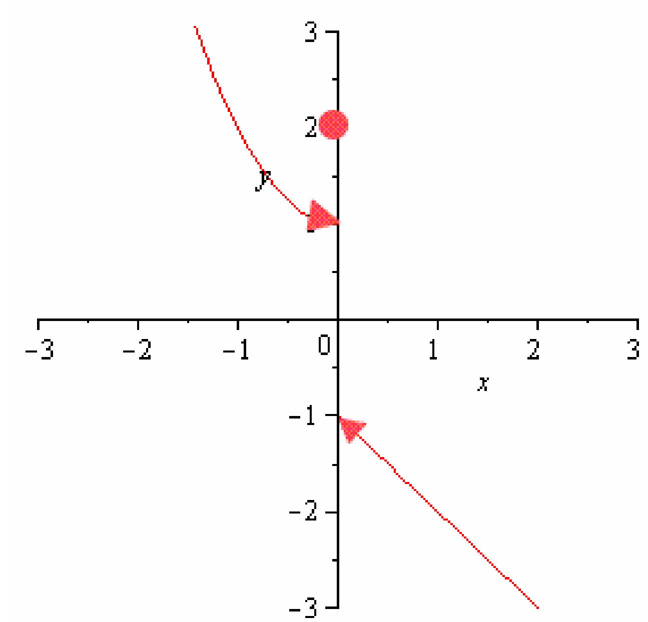
$$f(x) = \begin{cases} x, x \leq 0, \\ -x-1, x > 0 \end{cases}.$$



ადვილი დასანახია, რომ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=0$ წერტილში არის 0, ე. ი. $f(0)=0$. (იმ ფაქტს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=0$ წერტილში არის 0 და არა -1 ნახაზზე ავღნიშნავთ ისრით).

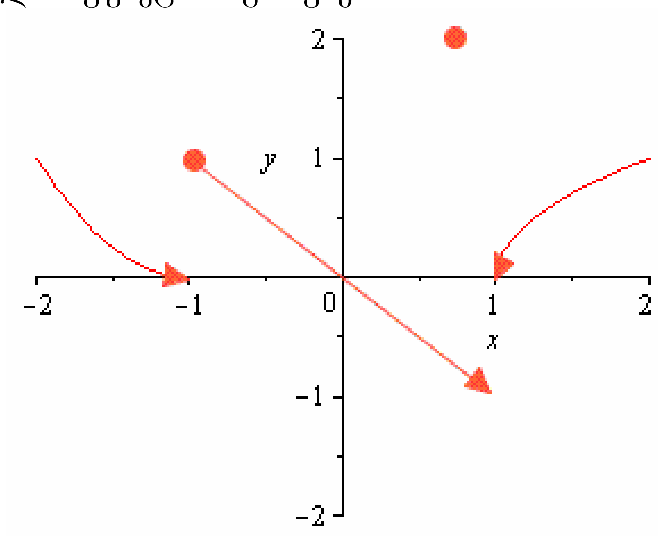
მაგალითი 2. 3. ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, x<0, \\ -x-1, x>0 \\ 2, x=0 \end{cases}.$$



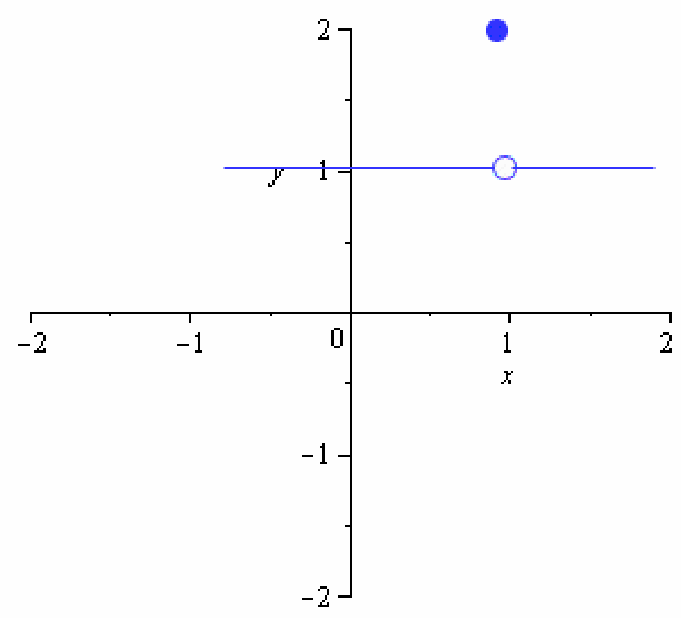
მაშინ $f(0)=2$.

მაგალითი 2.4.
ვთქვათ მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი.



მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=2$.

მაგალითი 2.5
თუ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე,



მაშინ $f(1)=2$.

მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა სიმრავლე $[-1,2]$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{1,2\}$ და ის მხოლოდ ორი ელემენტისაგან შედგება.

განმარტება: ფუნქციას $f: E \to R$ უწოდებენ მუდმივ ფუნქციას თუ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე ერთელემენტიანია.

შევნიშნოთ, რომ თუ ფუნქცია $f: R \to R$ მუდმივია, მაშინ მისი გრაფიკი ox ღერძის პარალელური წრფეა.

ფუნქციათა კომპოზიცია. ვთქვათ, მოცემულია ორი ფუნქცია $y=f(x)$ და $y=g(x)$. f და g ფუნქციების კომპოზიცია ანუ რთული ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \qquad g(x) \in D(f).$$

შენიშვნა 2. 1 საზოგადოდ, $f \circ g$ და $g \circ f$ სხვადასხვაა.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ვთქვათ, $f(x)=x^2+2x+3, g(x)=x+3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 + 2(x+3)+3 = x^2+8x+18$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+2x+3) = x^2+2x+3+3 = x^2+2x+6$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

```
> f:=x->x^2+2*x+3;
```

$$f := x \to x^2 + 2\,x + 3$$

> **g:=x->x+3;**

$$g := x \to x + 3$$

> **plot([f(x),g(x)],x=-2..2);**

> **h:=x->f(g(x));**

$$h := x \to \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$$

> **h(x);**

$$(x+3)^2 + 2\,x + 9$$

> **r:=x->g(f(x));**

$$r := x \to \mathrm{g}(\mathrm{f}(x))$$

> **r(x);**

$$x^2 + 2\,x + 6$$

> **plot([h(x),g(x)],x=-2..2);**

2. ვთქვათ, $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}) = 3(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}) - 2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = \frac{1}{3}(3x-2) + \frac{2}{3} = x$$

ამ შემთხვევაში, როგორც ვხედავთ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. მაგალითი 1-დან ჩანს, რომ ასეთ ტოლობას ყოველთვის არა აქვს ადგილი.
იმ შემთხვევაში, როცა $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, საქმე გვაქვს სპეციალური ტიპის f და g ფუნქციებთან.

შექცეული ფუნქცია. როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ გვაქვს $f(x) = 3x - 2$ და $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ფუნქციები, მაშინ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

$$f(-1) = 3(-1) - 2 = -5 \quad \Rightarrow \quad g(-5) = \frac{1}{3}(-5) + \frac{2}{3} = -1$$

$$g(2) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad f(\frac{4}{3}) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 2 = 2$$

როგორც ვხედავთ, f -ის მნიშვნელობა -1-ში არის -5, ხოლო g -ს მნიშვნელობა -5-ში -1-ის ტოლია, g -ს მნიშვნელობა 2-ში 4/3-ია, მაშინ, როცა f -ის მნიშვნელობა 4/3-ში არის 2. შევნიშნოთ, რომ ჩვენ

ფაქტიურად ორივე შემთხვევაში განვიხილეთ ფუნქციათა კომპოზიცია. პირველ შემთხვევაში გვაქვს

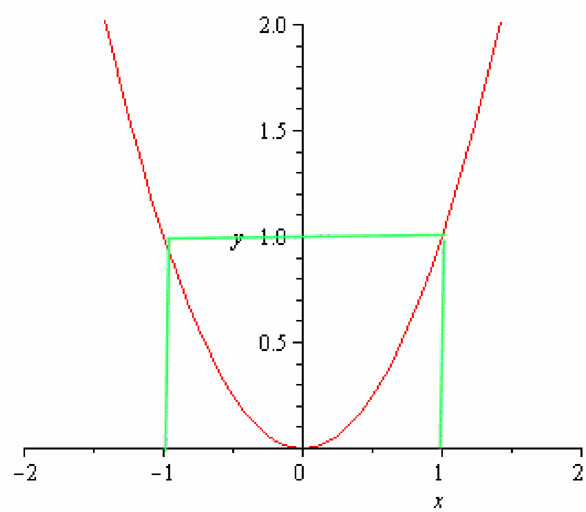
$$(f \circ g)(-5) = f(g(-5)) = f(-1) = -5,$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$(g \circ f)(\frac{4}{3}) = g(f(\frac{4}{3})) = g(2) = \frac{4}{3}.$$

როგორც ვხედავთ, f და g ფუნქციები ურთიერთშექცეულ მოქმედებებს ახორციელებენ. ამ ტიპის ფუნქციებს შექცეული ფუნქციები ეწოდებათ. ვიდრე შექცეული ფუნქციის მკაცრ განმარტებას მოვიყვანდეთ, მოვიყვანოთ ურთიერთცალსახა ფუნქციის განმარტება.

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $f: E \to R$. f-ს ეწოდება **ურთიერთ ცალსახა ფუნქცია,** თუ ყოველი ორი $x_1 \neq x_2$-თვის განსაზღვრის არიდან გვაქვს $f(x_1) \neq f(x_2)$. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = x^2$. ეს ფუნქცია არ არის ურთიერთცალსახა ფუნქცია, რადგან x–ის ორ განსხვავებულ მნიშვნელობას y–ის ერთიდაიგივე მნიშვნელობა შეესაბამება. მაგალითად, თუ ავიღებთ $x = -1$ და $x = 1$, გვექნება $f(-1) = f(1) = 1$.



მაგრამ, თუ შევზღუდავთ განსაზღვრის არეს $[0,+\infty)$ შუალედამდე, მივიღებთ ურთიერთცალსახა ფუნქციას.

ახლა მოვიყვანოთ შექცეული ფუნქციის მკაცრი განმარტება. ვიტყვით, რომ f და g **შექცეული ფუნქციებია**, თუ ისინი ურთიერთცალსახა ფუნქციებია და სრულდება ტოლობა

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x.$$

უფრო ზუსტად, ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ g არის f-ის **შექცეული ფუნქცია** და ჩავწერთ $g(x) = f^{-1}(x)$. ანალოგიურად, f არის g-ს **შექცეული ფუნქცია** და ჩავწერთ $f(x) = g^{-1}(x)$.

ე. ი ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული $f(x) = 3x - 2$ და $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ფუნქციებისთვის გვაქვს:

$$f(x) = 3x - 2 \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \qquad g^{-1}(x) = 3x - 2$$

შენიშვნა 2. 2 გვახსოვდეს, რომ $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

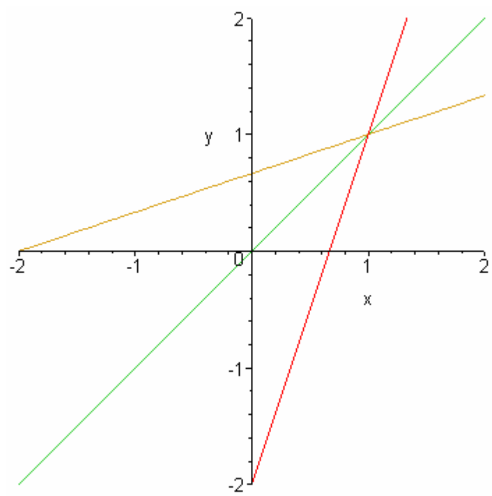
პრაქტიკულად როგორ ვიპოვოთ შექცეული ფუნქცია. ამისათვის განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $f(x)=5x+2$. ვიქცევით შემდეგნაირად: პირველ რიგში $f(x)$-ს ვცვლით y-ით და ვწერთ: $y=5x+2$. შემდეგ x და y-ს ადგილებს ვუცვლით: $x=5y+2$ და ვხსნით განტოლებას y-ის მიმართ: $y=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$. შემდეგ y-ს ვცვლით $f^{-1}(x)$-ით და ვწერთ: $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$. ბოლოს ვამოწმებთ $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$ ტოლობის მართებულობას.

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=5(\frac{1}{5}x-\frac{2}{5})+2=x$$

$$(f^{-1}\circ f\ \ )(x)=f^{-1}(f(x))=\frac{1}{5}(5x+2)-\frac{2}{5}=x$$

და ბოლოს, გავარკვიოთ რა კავშირია მოცემული ფუნქციის გრაფიკსა და მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკს შორის. ავიღოთ ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული $f(x)=3x-2$ და $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ ფუნქციები.

```
> plot([3*x-2,x,1/3*x+2/3],x=-2..2,y=-2..2);
```



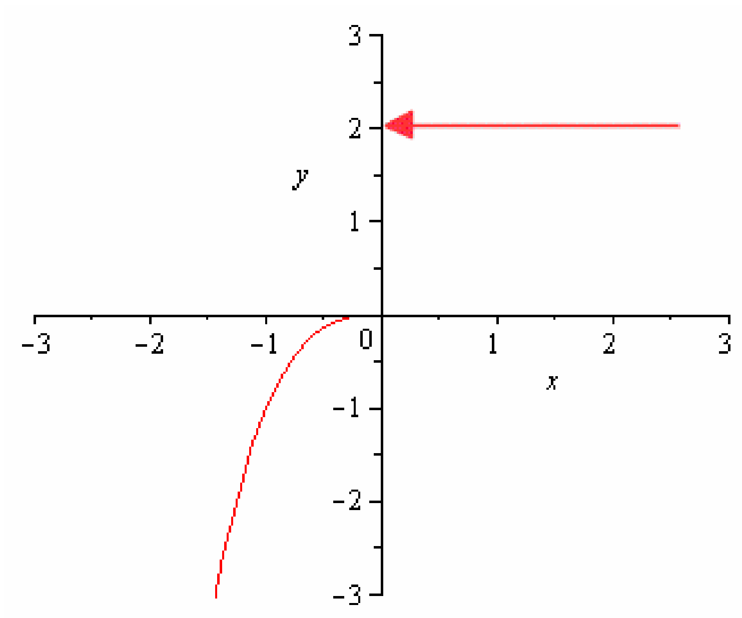
როგორც ვხედავთ, შექცეული ფუნქციის გრაფიკი მიიღება მოცემული ფუნქციის გრაფიკის $y=x$ წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიით. ეს წესი ყოველთვის მართებულია მოცემული ფუნქციისა და მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკებისთვის.

ზრდადი და კლებადი ფუნქციები. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $f:E\to R$. f ფუნქციას ეწოდება **ზრდადი** E **სიმრავლეზე**, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვისათვის

$$f(x_1)\le f(x_2),\ \text{როცა}\ x_1<\ x_2.$$

მაგალითი 2. 5. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in(-\infty,0] \\ 2\ , & x\in(0,+\infty) \end{cases}$$



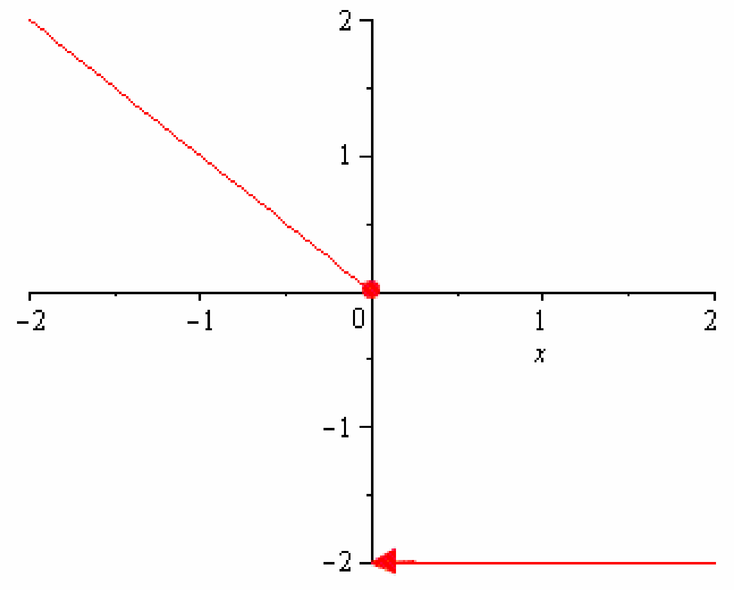
როგორც ვხედავთ, ეს ფუნქცია ზრდადია თავის განსაზღვრის არეზე.

f ფუნქციას ეწოდება კლებადი E სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x_1 და x_2 რიცხვისათვის

$$f(x_1)\geq f(x_2),\ \text{როცა}\ x_1< x_2 .$$

მაგალითი 2. 6. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} -x\ , & x\in(-\infty,0] \\ -2\ , & x\in(0,+\infty) \end{cases}$$



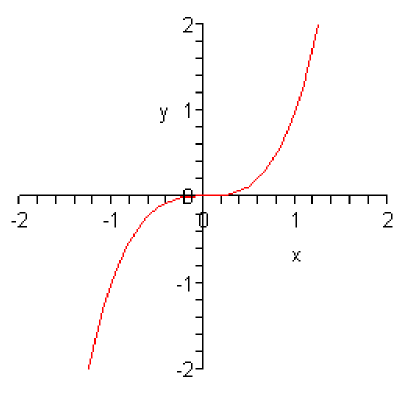
როგორც ვხედავთ, ეს ფუნქცია კლებადია თავის განსაზღვრის არეზე.

f ფუნქციას ეწოდება მკაცრად ზრდადი E სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x_1 და x_2 რიცხვისათვის

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ როცა } x_1 < x_2$$

მაგალითი. 2. 7 განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = x^3$$



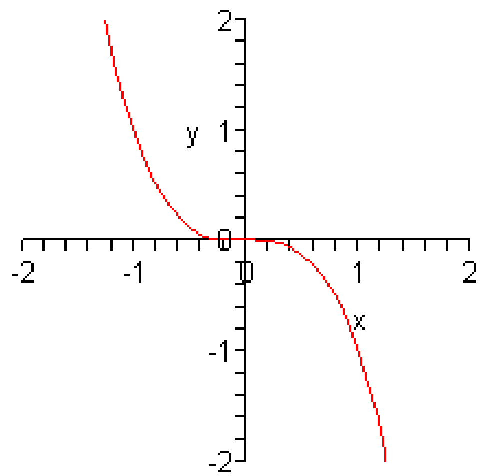
ეს ფუნქცია მკაცრად ზრდადია $R-$ზე.

f ფუნქციას ეწოდება მკაცრად კლებადი E სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x_1 და x_2 რიცხვისათვის

$$f(x_1) > f(x_2),\ \text{როცა}\ x_1 < x_2 .$$

მაგალითი 2. 8 განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = -x^3$$



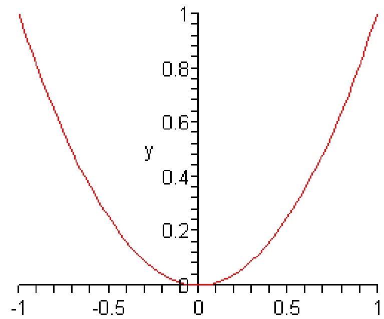
ეს ფუნქცია მკაცრად კლებადია R–ზე.

E სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება მონოტონური ამ სიმრავლეზე, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი, ხოლო f ფუნქცია მკაცრად მონოტონურია, თუ იგი მკაცრად ზრდადია ან მკაცრად კლებადია.

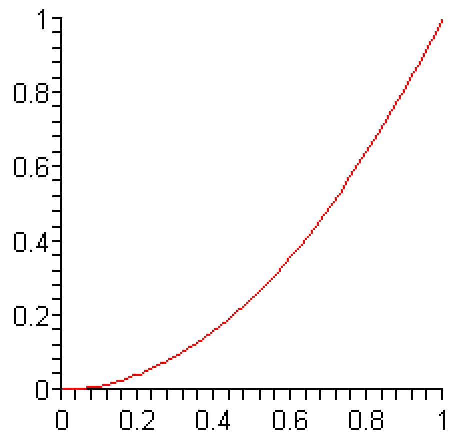
შენიშვნა 2. 3. შეიძლება მოცემული ფუნქცია არ იყოს მონოტონური.

მაგალითი. განვიხილოთ ფუნქცია

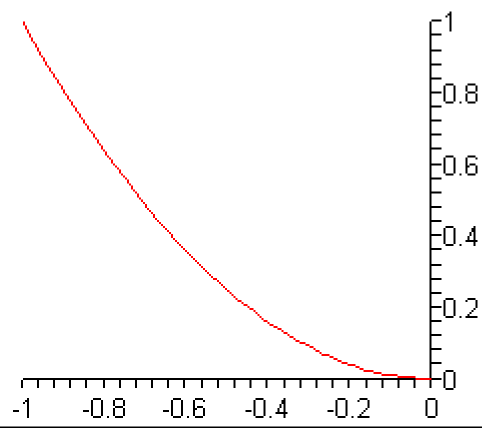
$$f(x) = x^2$$



ეს ფუნქცია არ არის მონოტონური. მართლაც, თუ ავიღებთ წერტილთა წყვილებს $x_1' = -2, x_2' = 1$ და $x_1'' = -1, x_2'' = 2$, მაშინ $f(x_1') = f(-2) = 4$, $f(x_2') = f(1) = 1$, $f(x_1'') = f(-1) = 1$, $f(x_2'') = f(2) = 4$. როგორც ვხედავთ, $f(x_1') > f(x_2')$, როცა $x_1' < x_2'$, ხოლო $f(x_1'') < f(x_2'')$, როცა $x_1'' < x_2''$. მაგრამ $[0, +\infty)$ შუალედზე ეს ფუნქცია მკაცრად ზრდადია



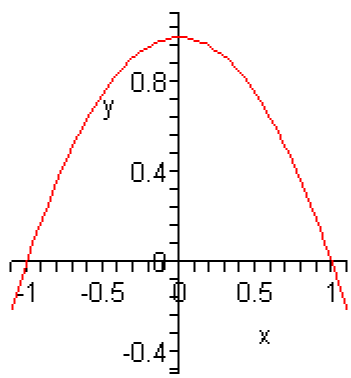
ხოლო $(-\infty, 0)$ შუალედზე იგი მკაცრად კლებადია



შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები. ვთქვათ, მოცემულია $f: E \to R$. f ფუნქციას ეწოდება **შემოსაზღვრული ზემოდან**, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი M რიცხვი, რომ ყოველი $x-$თვის $E-$დან გვაქვს $f(x) \le M$.

მაგალითი 2. 9. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = -x^2 + 1$$

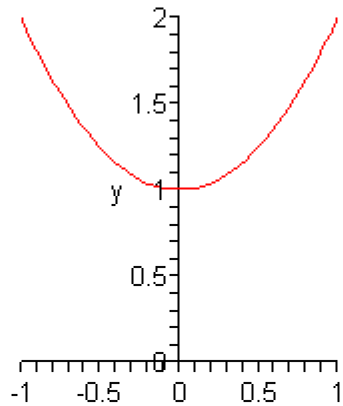


როგორც ვხედავთ, ყოველი $x-$თვის $f(x) \le 1$. ე.ი $f(x) = -x^2 + 1$ ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია.

f -ს ეწოდება **ქვემოდან შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი m რიცხვი, რომ ყოველი $x-$თვის $E-$დან $f(x) \ge m$

მაგალითი 2. 10. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = x^2 + 1$$



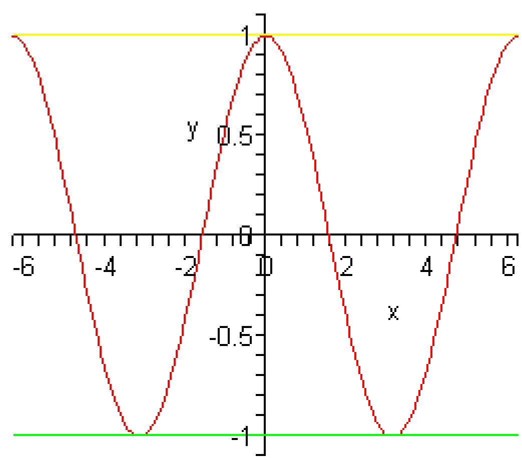
როგორც ვხედავთ, ყოველი x-თვის $f(x) \geq 1$. ე.ი $f(x) = x^2 + 1$ ფუნქცია ქვემოდან შემოსაზღვრულია.

f ფუნქციას ეწოდება **შემოსაზღვრული,** თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან, ისე ზემოდან.

მაგალითი 2. 11. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \cos x$$

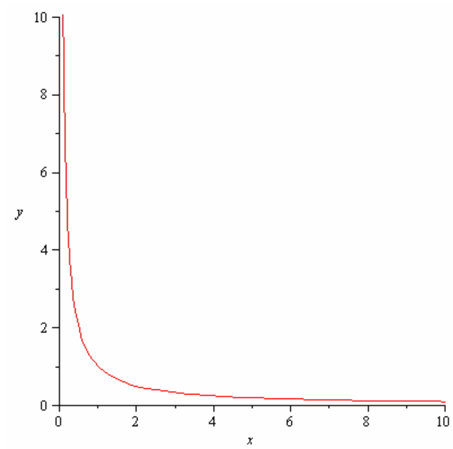
$f: R \to R$, f შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რადგან ყოველი $x \in R$-თვის $|\cos x| \leq 1$. ე.ი. $-1 \leq \cos x \leq 1$



f ფუნქციას ეწოდება **შემოუსაზღვრელი** E სიმრავლეზე, თუ ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისთვის მოიძებნება ამ სიმრავლის ისეთი x_0 წერტილი , რომ

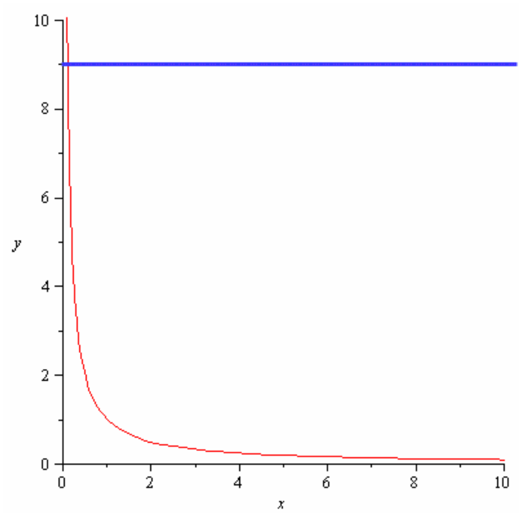
$$|f(x_0)| > A.$$

მაგალითი 2. 12. განვიხილოთ $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქცია $(0,1]$ შუალედში. ე.ი. $f:(0,1]\to R$.



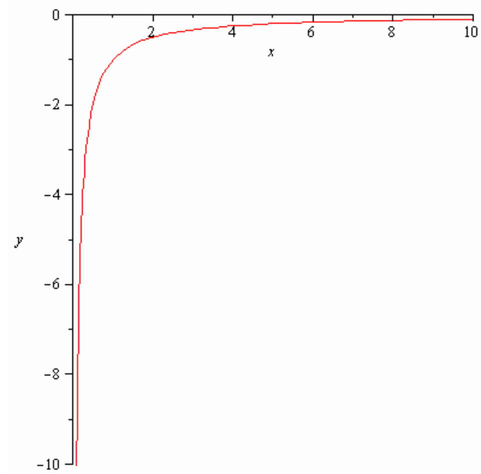
ეს ფუნქცია ქვემოდან შემოსაზღვრულია, რადგან ყოველი x-სთვის $(0,1]$-დან $f(x)=\frac{1}{x}\geq 1$. მაგრამ f არაა შემოსაზღვრული, რადგან იგი არაა ზემოდან შემოსაზღვრული. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი A დადებითი რიცხვი $(A>1)$. ავიღოთ $x_0=\frac{1}{2A}$, $x_0\in(0,1]$ მაშინ

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=2A>A.$$



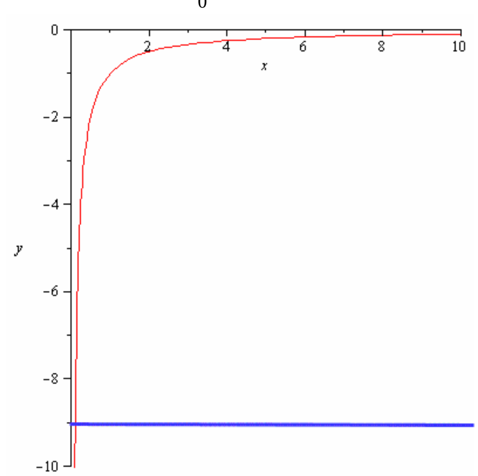
ე.ი. $f(x)=\frac{1}{x}$ არაა შემოსაზღვრული $(0,1]$-ზე.

მაგალითი 2. 13. განვიხილოთ $f(x)=-\frac{1}{x}$ ფუნქცია $(0,1]$ შუალედში. ე.ი. $f:(0,1]\to R$.



ეს ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია, რადგან ყოველი x-სთვის $(0,1]$-დან $f(x)=-\frac{1}{x}<0$. მაგრამ f არაა შემოსაზღვრული, რადგან იგი არაა ქვემოდან შემოსაზღვრული. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი რაგინდ დიდი A_0 დადებითი რიცხვი ($A>1$). ავიღოთ $x_0=\frac{1}{2A}$, $x_0\in(0,1]$ ამასთან

$$\left|f(x_0)\right|=\frac{1}{x_0}=2A>A.$$



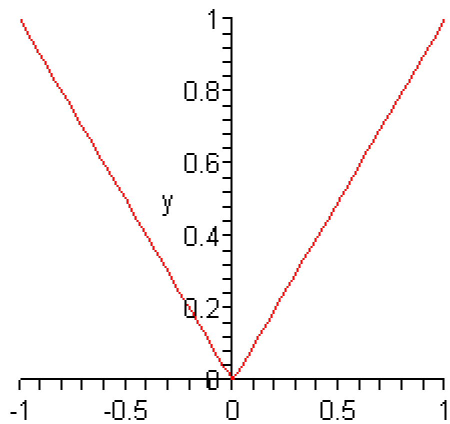
ე.ი. $f(x)=-\frac{1}{x}$ არაა შემოსაზღვრული $(0,1]$-ზე.

ლუწი და კენტი ფუნქციები. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულ E შუალედში.
f ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ ნებისმიერი x-თვის განსაზღვრის არიდან მართებულია ტოლობა $f(-x)=f(x)$.

მაგალითი 2. 12 $f(x)=|x|$

$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$$

ე.ი. $f(x)=|x|$ ლუწია.



ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

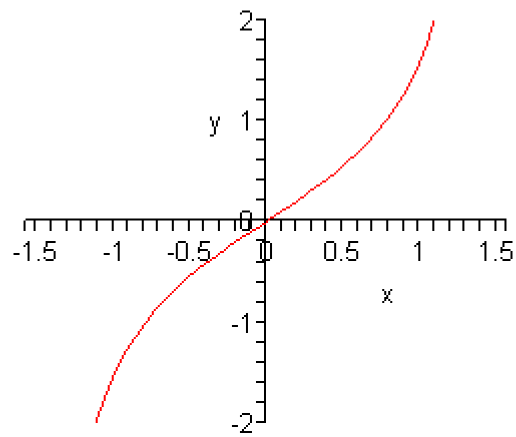
f ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ ნებისმიერი $x-$თვის განსაზღვრის არიდან მართებულია ტოლობა

$$f(-x)=-f(x).$$

მაგალითი 2. 13 $f(x)=\tan x$; $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to R$.

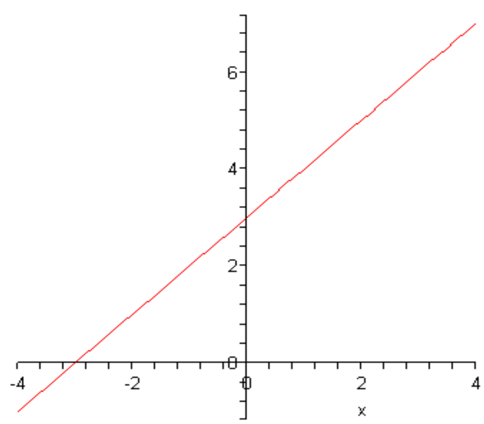
$$f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$$

ე.ი. $f(x)=tgx$ კენტია.



კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

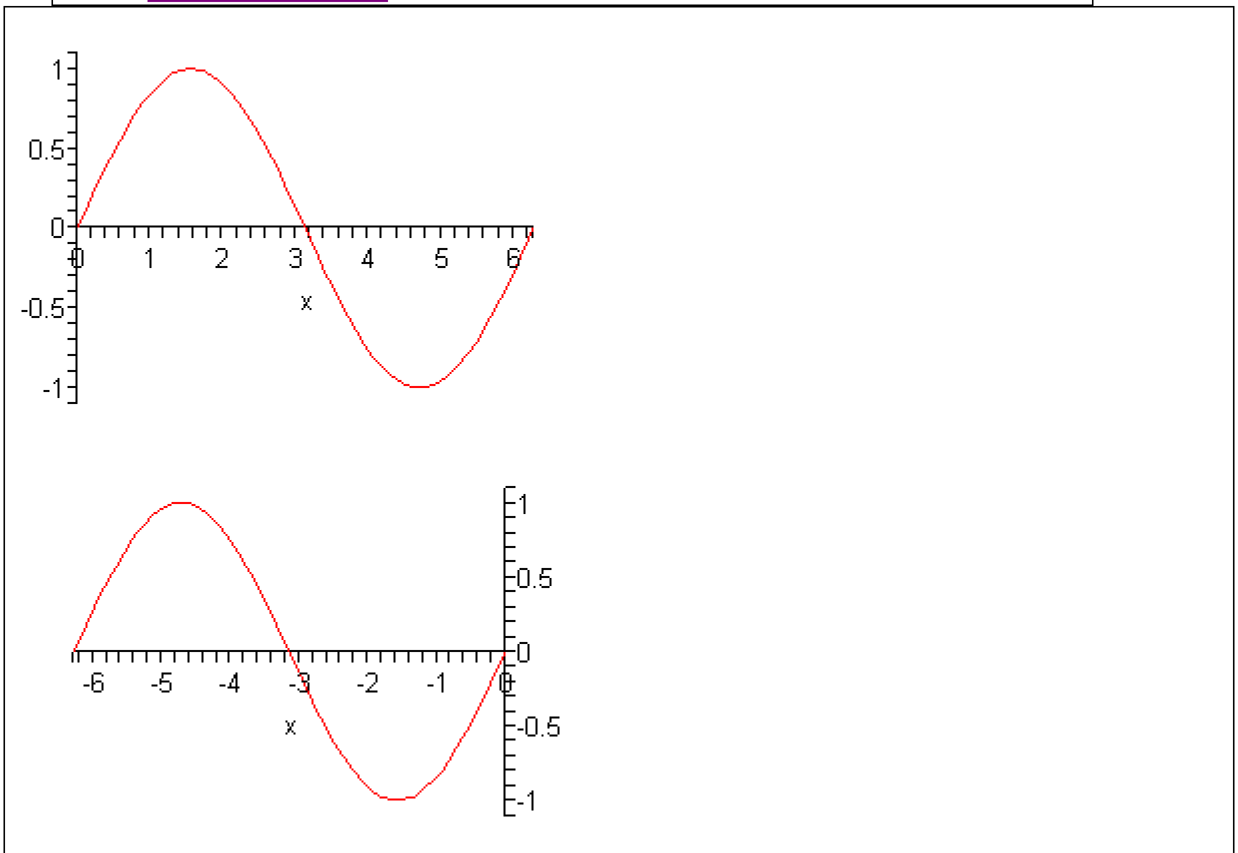
შენიშვნა 2. 4. სიმეტრიულ შუალედზე განსაზღვრული ფუნქცია შეიძლება არ იყოს არც ლუწი და არც კენტი. მაგალითად, $f(x)=x+3$ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი. მართლაც, $f(-x)=(-x)+3=-x+3 \Rightarrow f(-x)\neq -f(x)$ და $f(-x)\neq f(x)$.

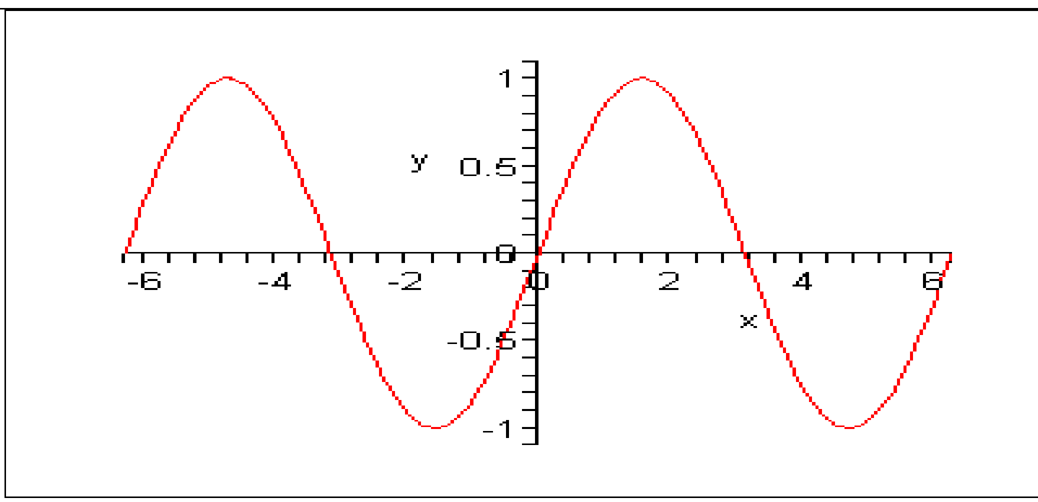


პერიოდული ფუნქცია. ვთქვათ, მოცემულია $f:E\to R$. f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული ფუნქცია პერიოდით $T\neq 0$, თუ განსაზღვრის არის ყოველი x წერტილისთვის $x\pm T$ წერტილები ეკუთვნიან განსაზღვრის არეს და

$$f(x+T)=f(x)$$

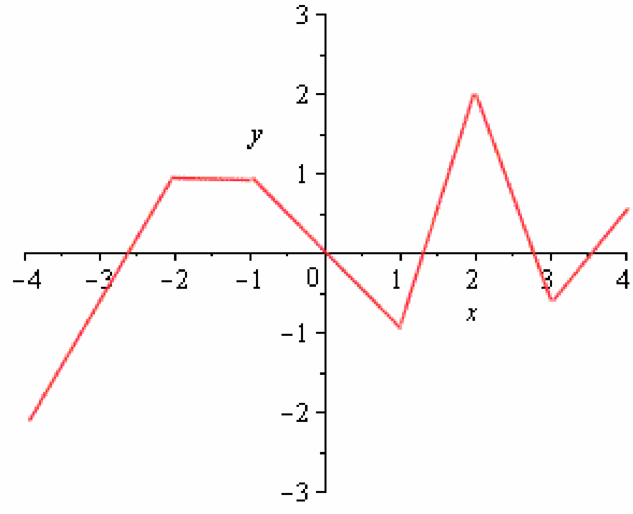
მაგალითი 2. 14. $f(x)=\sin x$ პერიოდულია პერიოდით 2π.





თუ T არის f ფუნქციის პერიოდი, მაშინ $-T$-ც პერიოდია. მართლაც,

$$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x).$$



გარდა ამისა, თუ T f ფუნქციის პერიოდია, მაშინ $\pm nT$, სადაც $n \in N$, პერიოდია.

ჩვეულებრივ, ფუნქციის **პერიოდს** უწოდებენ ყველა დადებით პერიოდებს შორის უმცირესს. $f(x)=\sin x$ ფუნქციას ეწოდება $2\pi-$პერიოდული ფუნქცია, თუმცა მისი პერიოდებია აგრეთვე $2k\pi$,სადაც $k=\pm1,\pm2,\ldots$. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის პერიოდთა შორის შეიძლება არ არსებობდეს უმცირესი. მაგალითად, $f(x)=1$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი a, ვინაიდან

$$f(x+a)=1=f(x).$$

ფუნქციის ექსტრემუმი. ვთქვათ, მოცემულია $f:E\to R$, სადაც E რაიმე შუალედია. $x_0 \in E$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის **ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი,** თუ მოიძებნება x_0-ის ისეთი $\varepsilon-$მიდამო $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, რომ ყოველი $x-$თვის $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap E$ სიმრავლიდან გვაქვს

$$f(x)\le f(x_0).$$

თვით $f(x_0)$ რიცხვს უწოდებენ **ლოკალურ მაქსიმუმს**.

$x=-2, x=-1, x=2, x=4$ წერტილები ლოკალური მაქიმუმის წერტილებია

$x_0 \in E$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის **ლოკალური მინიმუმის წერტილი,** თუ მოიძებნება x_0-ის ისეთი $\varepsilon-$მიდამო, რომ ყოველი $x-$თვის $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap E$ სიმრავლიდან გვაქვს

$$f(x)\ge f(x_0).$$

$f(x_0)$ რიცხვს უწოდებენ **ლოკალურ მინიმუმს.**

$x=-4, x=1, x=3$ წერტილები ლოკალური მინიმუმის წერტილებია.

ლოკალური მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილებს **ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები** ეწოდება, ხოლო ლოკალურ მაქსიმუმს ან მინიმუმს **ლოკალურ ექსტრემუმს** უწოდებენ.

$x_0 \in E$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, თუ მოიძებნება x_0-ის ისეთი $\varepsilon-$მიდამო $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, რომ ყოველი $x-$თვის $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap E \setminus \{x_0\}$ სიმრავლიდან გვაქვს

$$f(x) < f(x_0).$$

თვით $f(x_0)$ რიცხვს უწოდებენ მკაცრ ლოკალურ მაქსიმუმს.

$x=2, x=4$ წერტილები მკაცრი მაქსიმუმის წერტილებია, ხოლო $x=-2, x=-1$ არ არის მკაცრი ლოკალური მაქიმუმის წერტილები.

$x_0 \in E$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მინიმუმის წერტილი, თუ მოიძებნება x_0-ის ისეთი $\varepsilon-$მიდამო, რომ ყოველი $x-$თვის $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap E \setminus \{x_0\}$ სიმრავლიდან გვაქვს

$$f(x) > f(x_0).$$

$f(x_0)$ რიცხვს უწოდებენ მკაცრ ლოკალურ მინიმუმს.
მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილებს მკაცრი ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო მკაცრ ლოკალურ მაქსიმუმს ან მინიმუმს მკაცრ ლოკალურ ექსტრემუმს უწოდებენ.

$x=-4, x=1, x=3$ წერტილები მკაცრი მინიმუმის წერტილებია.

ვთქვათ, მოცემულია $f: E \to R$, სადაც E რაიმე შუალედია ბოლოებით a და b წერტილებში და $x_0 \in (a,b)$ წერტილი არის f ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ $x_0 \in E$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის შიგა ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.

$x=-2, x=-1, x=1, x=2, x=3$ წერტილები შიგა ექსტრემუმის წერტილებია. $x=-4, x=4$ წერტილები არ არიან შიგა ექსტრემუმის წერტილები.

ვთქვათ, მოცემულია $f: E \to R$, სადაც E რაიმე შუალედია. განსაზღვრის არის ისეთ x_0 წერტილს, რომლისთვისაც გვაქვს $f(x) \le f(x_0)$ ყოველი $x \in E-$თვის, ეწოდება f ფუნქციის გლობალური (აბსოლუტური) მაქსიმუმის წერტილი ან

უბრალოდ, **მაქსიმუმის წერტილი** , ხოლო თვით $f(x_0)$–ს ფუნქციის მაქსიმალური (გლობალური მაქსიმუმი) მნიშვნელობა.

$x=2$ წერტილი გლობალური მაქსიმუმის წერტილია.

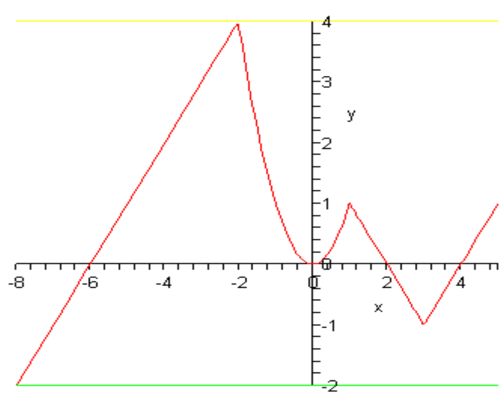
განსაზღვრის არის ისეთ x_0 წერტილს, რომლისთვისაც გვაქვს: $f(x) \ge f(x_0)$ ყოველი $x \in E$ –თვის, ეწოდება f ფუნქციის **გლობალური (აბსოლუტური) მინიმუმის წერტილი** ან უბრალოდ, **მინიმუმის წერტილი,** ხოლო $f(x_0)$-ს ფუნქციის მინიმალური (გლობალური მინიმუმი) მნიშვნელობა.

$x=-4$ წერტილი გლობალური მინიმუმის წერტილია.

გლობალური მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილს **გლობალური ექსტრემუმის** ან უბრალოდ, **ექსტრემუმის** წერტილი ეწოდება.

მაგალითი 2. 15

$$f(x)=\begin{cases} x+6\,,\ x\in[-8,-2) \\ x^2\,,\ x\in[-2,1] \\ 2-x\,,\ x\in(1,3] \\ x-4\,,\ x\in(3,5] \end{cases}$$



როგორც ვხედავთ, $x=-8$ და $x=-2$ წერტილები მოცემული f ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმის წერტილებია. $x=-8$ არის გლობალური მინიმუმის წერტილი, $f(-8)=-2$ არის გლობალური მინიმუმი. $x=-2$ არის გლობალური მაქსიმუმის წერტილი, $f(-2)=4$ არის გლობალური მაქსიმუმი.

მაგალითი 2. 16 განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x)=\begin{cases}1\,,\ x\in[-1;1]\cap Q\\ -1\,,\ x\in[-1;1]\cap I\end{cases}$$

როგორც ვხედავთ, [-1;1] შუალედის ყოველი რაციონალური რიცხვი ამ ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო ამავე შუალედის ყოველი ირაციონალური რიცხვი არის გლობალური მინიმუმის წერტილი. ამ ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმი არის 1, ხოლო გლობალური მინიმუმი არის -1.

შენიშვნა 2. 5. გლობალური ექსტრემუმის წერტილი არის ერთ-ერთი ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.

ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქცია და მათი თვისებები

წრფივი და კვადრატული ფუნქციები

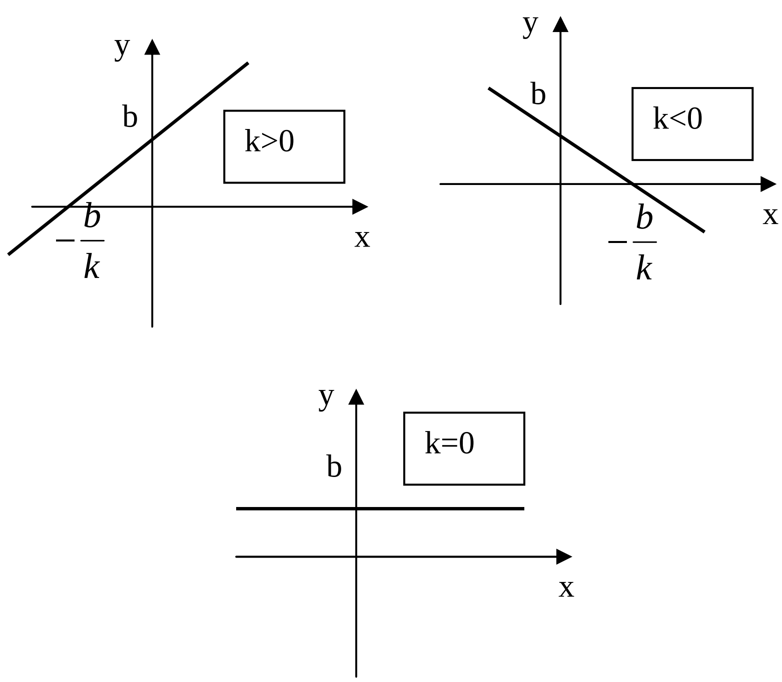
წრფივი ფუნქცია

განსაზღვრება. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით* $f(x)=kx+b$, *წრფივი ფუნქცია ეწოდება.*

წრფივი ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს და პირიქით, საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე ყოველი წრფე, რომელიც არ არის ორდინატთა ღერძის პარალელური წარმოადგენს რომელიღაც წრფივი ფუნქციის გრაფიკს. $y=kx+b$ განტოლებას უწოდებენ k საკუთხო კოეფიციენტის მქონე წრფის განტოლებას, რადგანაც რიცხვი k ტოლია იმ კუთხის ტანგენსისა, რომელსაც ეს წრფე ქმნის ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. k სიდიდეს ზოგჯერ წრფის დახრასაც უწოდებენ. ქვემოთ ჩამოვთვლით წრფივი ფუნქციის ძირითად თვისებებს.

1. წრფივი ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე- $D(f)=\mathbb{R}$;

2. თუ $k \neq 0$, მაშინ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $E(f)=\mathbb{R}$, ხოლო თუ $k=0$, მაშინ $E(f)=\{b\}$;
3. თუ $k>0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია მკაცრად ზრდადია თავის განსაზღვრის არეზე, ხოლო თუ $k<0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია მკაცრად კლებადია თავის განსაზღვრის არეზე;
4. თუ $k \neq 0$ და $b=0$, მაშინ ფუნქცია კენტია, ხოლო თუ $k=0$ მაშინ ფუნქცია ლუწია. თუ $kb \neq 0$ ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი.
5. გრაფიკს აქვს შემდეგი სქემატური სახე:



კვადრატული ფუნქცია და მისი თვისებები

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით $f(x)=ax^2+bx+c$, სადაც $a,b,c\in\mathbb{R}$ ნამდვილი რიცხვებია და $a \neq 0$, კვადრატული ფუნქცია ეწოდება, ხოლო

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f(x)$ შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

b^2-4ac გამოსახულებას ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ეწოდება და D სიმბოლოთი აღინიშნება.

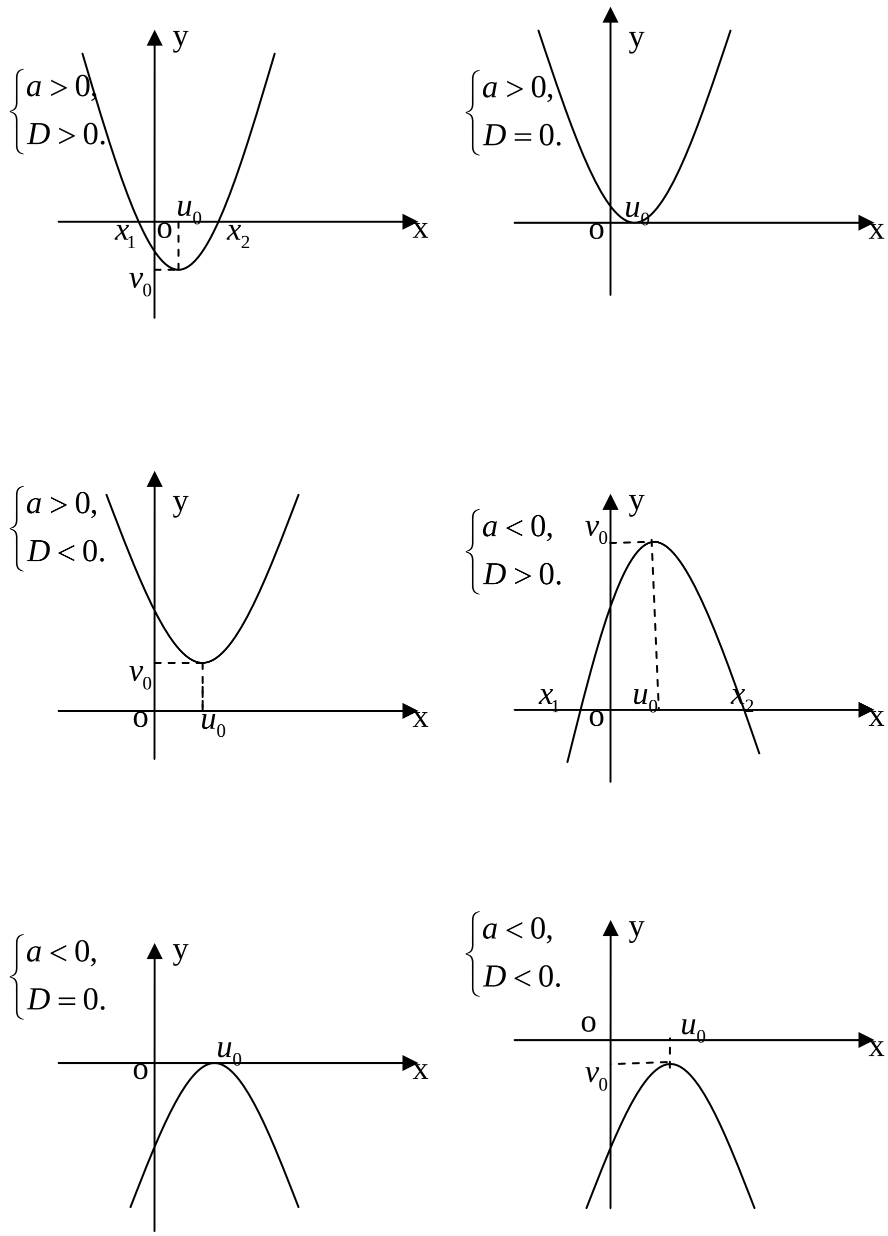
ნათელია, რომ თუ $b=0$, მაშინ f ფუნქცია ლუწია და მაშასადამე მისი გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. თუ $b \neq 0$, მაშინ

$x+\dfrac{b}{2a}=t$ გარდაქმნით მიღებული $g(t)=at^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ფუნქცია არის ლუწი და მაშასადამე f ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=-\dfrac{b}{2a}$ წრფის მიმართ. g ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის შტოები მიმართულია ზემოთ (ქვემოთ), როდესაც $a>0$ ($a<0$), ხოლო წვეროს კოორდინატებია $(0,\dfrac{4ac-b^2}{4a})$. აქედან ნათელია, რომ f ფუნქციის გრაფიკი აგრეთვე წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის შტოები მიმართულია ზემოთ (ქვემოთ), როდესაც $a>0$ ($a<0$), ხოლო წვეროს კოორდინატებია $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$.

ქვემოთ ჩვენ ჩამოვთვლით კვადრატული ფუნქციის ძირითად თვისებებს.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(f)=\mathbb{R}$.
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა არე $E(f)=(\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$, როდესაც $a>0$ და $E(f)=(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a})$, როდესაც $a<0$.
3. ა) როდესაც $a>0$ ფუნქცია მკაცრად კლებადია $(-\infty,-\dfrac{b}{2a})$ ინტერვალში და მკაცრად ზრდადია $(-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ ინტერვალში.

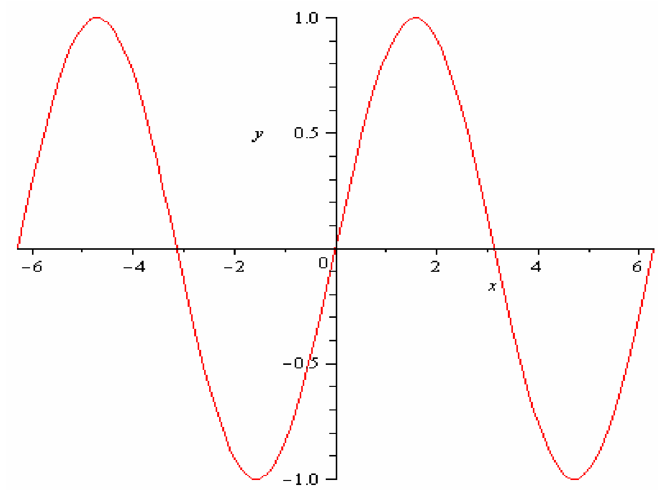
   ბ) როდესაც $a<0$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია $(-\infty,-\dfrac{b}{2a})$ ინტერვალში და მკაცრად კლებადია $(-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ ინტერვალში.
4. ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის წვეროს კოორდინატებია $(u_0,v_0)=(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$. აღნიშნული პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ, თუ $a>0$ და ქვემოთ, თუ $a<0$. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=-\dfrac{b}{2a}$ წრფის მიმართ.
5. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს თვისობრივად ახასიათებს a და D პარამეტრები. მათგან ჩვენ გამოვყოფთ 6 შემდეგ სხვადასხვა სახეს:



$y=\sin x$ ფუნქცია

1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ე. ი. $D(\sin)=\mathbb{R}$;
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\sin)=[-1,1]$ სეგმენტი;

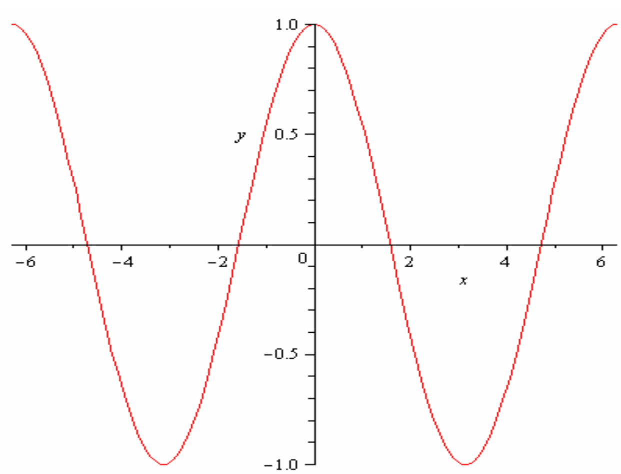
3. ფუნქცია კენტია, ე.ი. $\forall x \in \mathbb{R}$ რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა $\sin(-x) = -\sin x$;
4. ფუნქცია პერიოდულია, მას გააჩნია უმცირესი დადებითი პერიოდი, რომელიც 2π-ს ტოლია, ე.ი. $\forall x \in \mathbb{R}$ და $\forall k \in \mathbb{Z}$ რიცხვებისათვის $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$;
5. ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ სიმრავლეზე, ხოლო უარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi + 2\pi k, 2\pi k)$ სიმრავლეზე;



6. ნებისმიერი k მთელი რიცხვისათვის ფუნქცია ზრდადია $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ სახის ყოველ ინტერვალზე, ხოლო კლებადია $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$ სახის ყოველ ინტერვალზე;
7. ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (მას სინუსოიდას უწოდებენ)

$y = \cos x$ ფუნქცია

1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ე. ი. $D(\cos) = \mathbb{R}$;
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\cos) = [-1,1]$ სეგმენტი;
3. ფუნქცია ლუწია, ე.ი. $\forall x \in \mathbb{R}$ რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა $\cos(-x) = \cos x$;
4. ფუნქცია პერიოდულია, მას გააჩნია უმცირესი დადებითი პერიოდი, რომელიც 2π-ს ტოლია, ე.ი. $\forall x \in \mathbb{R}$ და $\forall k \in \mathbb{Z}$ რიცხვებისათვის $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$;



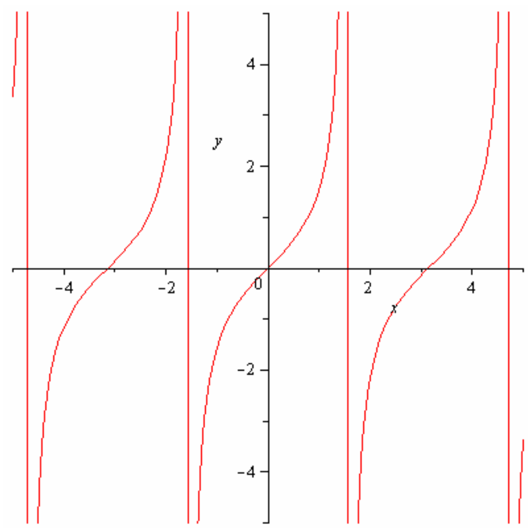
5. ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$

სიმრავლეზე, ხოლო უარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k)$ სიმრავლეზე;

6. $\forall k\in\mathbb{Z}$ მთელი რიცხვისათვის ფუნქცია ზრდადია $(-\pi+2\pi k,2\pi k)$ სახის ყოველ ინტერვალში, ხოლო კლებადია $(2\pi k,\pi+2\pi k)$ სახის თითოეულ ინტერვალში;
7. ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (მას კოსინუსოიდას უწოდებენ)

$y=\tan x$ ფუნქცია

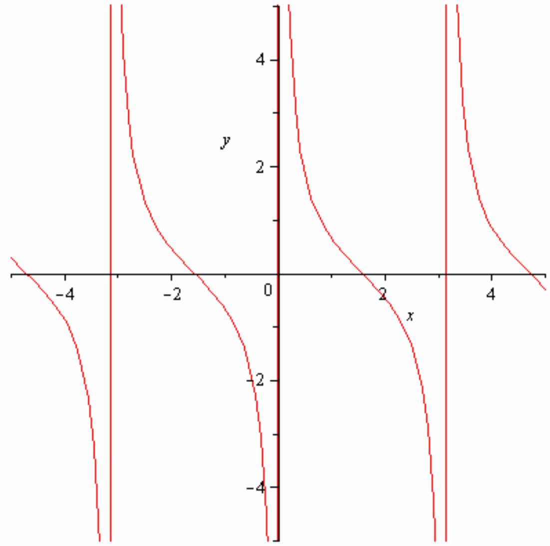
1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(\tan)=\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}$ სიმრავლე;
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\tan)=\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
3. ფუნქცია კენტია, ე.ი. ნებისმიერი x-თვის განსაზღვრის არედან სამართლიანია ტოლობა $\tan(-x)=-\tan x$;
4. ფუნქცია პერიოდულია, მას გააჩნია უმცირესი დადებითი პერიოდი, რომელიც π-ს ტოლია, ე.ი. ნებისმიერი x-თვის განსაზღვრის არედან და $\forall k\in\mathbb{Z}$ რიცხვებისათვის $\tan(x+\pi k)=\tan x$;
5. ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k)$ სიმრავლეზე, ხოლო უარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi k)$ სიმრავლეზე;
6. ნებისმიერი k მთელი რიცხვისათვის ფუნქცია ზრდადია $(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k)$ სახის ყოველ ინტერვალზე;
7. ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე



$y=\cot x$ ფუნქცია

1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(\cot)=\mathbb{R}\setminus\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}$ სიმრავლე;

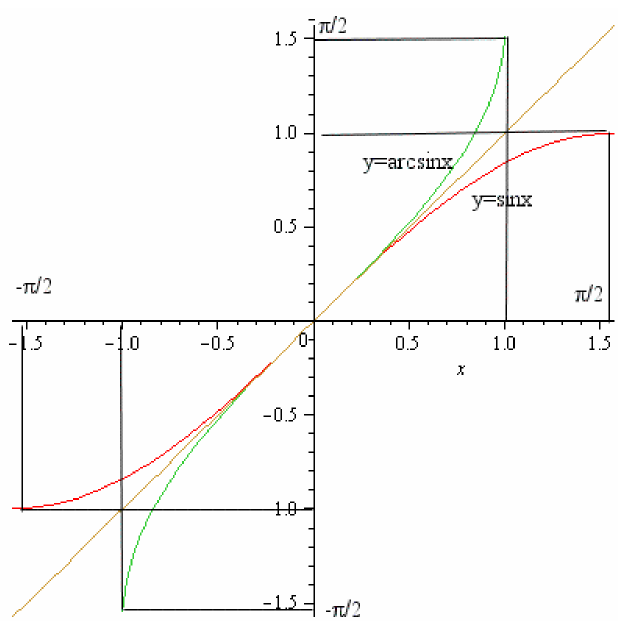
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\cot)=\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
3. ფუნქცია კენტია, ე.ი. $\forall x\in\mathbb{R}$ რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა $\cot(-x)=-\cot x$;
4. ფუნქცია პერიოდულია, მას გააჩნია უმცირესი დადებითი პერიოდი, რომელიც π-ს ტოლია, ე.ი. $\forall x\in\mathbb{R}$ და $\forall k\in\mathbb{Z}$ რიცხვებისათვის $\cot(x+\pi k)=\cot x$;
5. ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k)$ სიმრავლე-ზე, ხოლო უარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi k)$ სიმრავლეზე;
6. $\forall k\in\mathbb{Z}$ მთელი რიცხვისათვის ფუნქცია კლებადია $(\pi k,\pi+2\pi k)$ სახის ყოველ ინტერვალში;
7. ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე



$y=\arcsin x$ ფუნქცია

მტკიცდება, რომ $y=\sin x$ ფუნქციის შეზღუდვა $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ სეგმენტზე წარმოადგენს ურთიერთცალსახა ფუნქციას $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ სეგმენტიდან $[-1,1]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის- $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ შექცეული ფუნქცია, რომელსაც arcsin სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ე.ი. $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, რომელიც განიმარტება ტოლობით: $\sin(\arcsin x)=x$, $\forall x\in[-1,1]$.

შენიშვნა 2. 6. arcsin *ფუნქცია წარმოადგენს* $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ *ფუნქციის შექცეულს და არა* sin *ფუნქციის შექცეულს, ამიტომ* $\arcsin(\sin x)=x$ *ტოლობა საზოგადოდ არასწორია, ის*

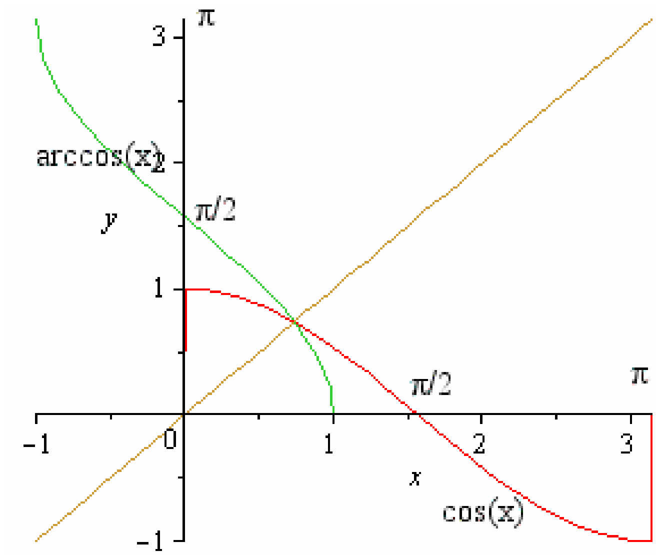


ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

1. $y=\arcsin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(\arcsin)=[-1,1]$ სიმრავლე;
2. $y=\arcsin x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\arcsin)=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ სიმრავლე;
3. ფუნქცია კენტია, ე.ი. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$;
4. ფუნქცია ზრდადია ყველგან თავის განსაზღვრის არეში;
5. აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულ გრაფიკს $y=x$ ღერძის მიმართ. მას აქვს შემდეგი სახე

$y=\arccos x$ ფუნქცია

მტკიცდება, რომ $y=\cos x$ ფუნქციის შეზღუდვა $[0,\pi]$ სეგმენტზე წარმოადგენს ურთიერთცალსახა ფუნქციას $[0,\pi]$ სეგმენტიდან $[-1,1]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის $\cos|_{[0,\pi]}$ შექცეული ფუნქცია, რომელსაც arccos სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ე.ი. $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$, რომელიც განიმარტება ტოლობით: $\cos(\arccos x)=x$, $\forall x\in[-1,1]$.

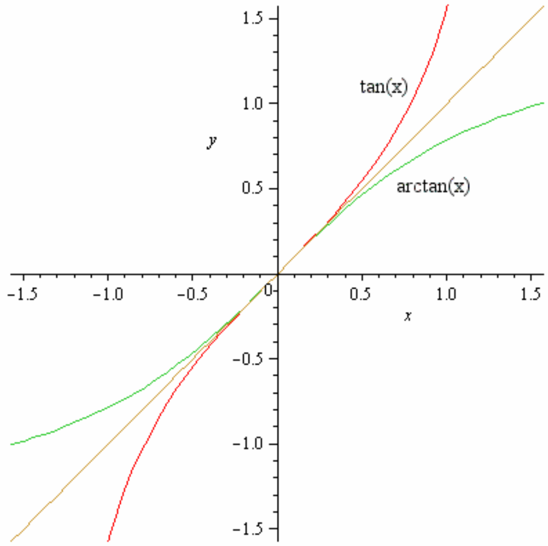


შენიშვნა 2. 7. arccos *ფუნქცია წარმოადგენს* $\cos|_{[0,\pi]}$ *ფუნქციის შექცეულს და არა* cos *ფუნქციის შექცეულს, ამიტომ* $\arccos(\cos x)=x$ *ტოლობა საზოგადოდ არასწორია, ის ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როდესაც* $x\in[0,\pi]$.

1. $y=\arccos x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(\arccos)=[-1,1]$ სიმრავლე;
2. $y=\arccos x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\arccos)=[0,\pi]$ სიმრავლე;
3. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, $\forall x\in[-1,1]$;
4. ფუნქცია კლებადია ყველგან თავის განსაზღვრის არეში;
5. აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს $\cos|_{[0,\pi]}$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულ გრაფიკს $y=x$ ღერძის მიმართ. მას აქვს შემდეგი სახე

$y=\arctan x$ ფუნქცია

მტკიცდება, რომ $y=\tan x$ ფუნქციის შეზღუდვა $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ინტერვალზე წარმოადგენს ურთიერთცალსახა ფუნქციას $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ინტერვალიდან ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის- $\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ შექცეული ფუნქცია, რომელსაც arctan სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ე.ი. $\arctan:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, რომელიც განიმარტება ტოლობით: $tg(\arctan x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

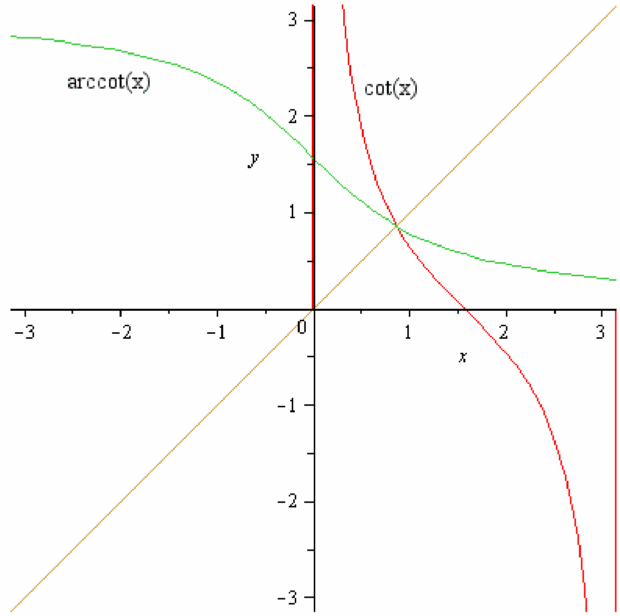


შენიშვნა 2. 8. $\mathrm{ar}\,c\tan$ *ფუნქცია წარმოადგენს* $\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ *ფუნქციის შექცეულს და არა* tan *ფუნქციის შექცეულს, ამიტომ* $\arctan(\tan x)=x$ *ტოლობა საზოგადოდ არასწორია, ის ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როდესაც* $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

1. $y=\arctan x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(\arctan g)=\mathbb{R}$ სიმრავლე;
2. $y=\arctan x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\arctan)=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ სიმრავლე;
3. ფუნქცია კენტია, ე.ი. $\arctan(-x)=-\arctan x$, $\forall x\in\mathbb{R}$;
4. ფუნქცია ზრდადია ყველგან თავის განსაზღვრის არეში;
5. აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს $\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულ გრაფიკს $y=x$ ღერძის მიმართ. მას აქვს შემდეგი სახე

$y = arc\cot x$ ფუნქცია

მტკიცდება, რომ $y = \cot x$ ფუნქციის შეზღუდვა $(0,\pi)$ ინტერვალზე წარმოადგენს ურთიერთცალსახა ფუნქციას $(0,\pi)$ ინტერვალიდან ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის $\cot|_{(0,\pi)}$ შექცეული ფუნქცია, რომელსაც $arc\cot$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ე.ი. $arc\cot : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, რომელიც განიმარტება ტოლობით: $\cot(arc\cot x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



შენიშვნა 2. 9. $arc\cot$ *ფუნქცია წარმოადგენს* $\cot|_{(0,\pi)}$ *ფუნქციის შექცეულს და არა* $\cot$ *ფუნქციის შექცეულს, ამიტომ* $arc\cot(\cot x) = x$ *ტოლობა საზოგადოდ არასწორია, ის ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როდესაც* $x \in (0,\pi)$.

1. $y = arc\cot x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(\mathrm{arc}\,ctg) = \mathbb{R}$ სიმრავლე;
2. $y = arc\cot x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(arc\cot) = (0,\pi)$ სიმრავლე;
3. $arc\cot(-x) = \pi - arc\cot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
4. ფუნქცია კლებადია ყველგან თავის განსაზღვრის არეში;
5. აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს $\cot|_{(0,\pi)}$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულ გრაფიკს $y = x$ ღერძის მიმართ. მას აქვს შემდეგი სახე

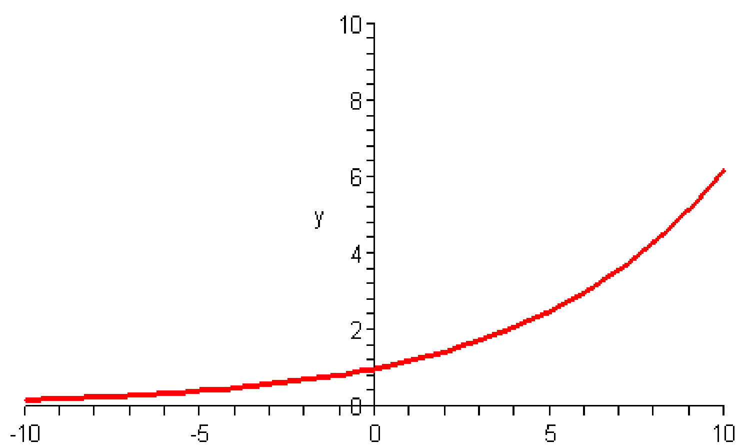
მაჩვენებლიანი ფუნქცია

განსაზღვრება 2. 1 *$y = a^x$ ფუნქციას, სადაც $a > 0$ და $a \neq 1$ ეწოდება მაჩვენებლიანი ფუნქცია a ფუძით.*

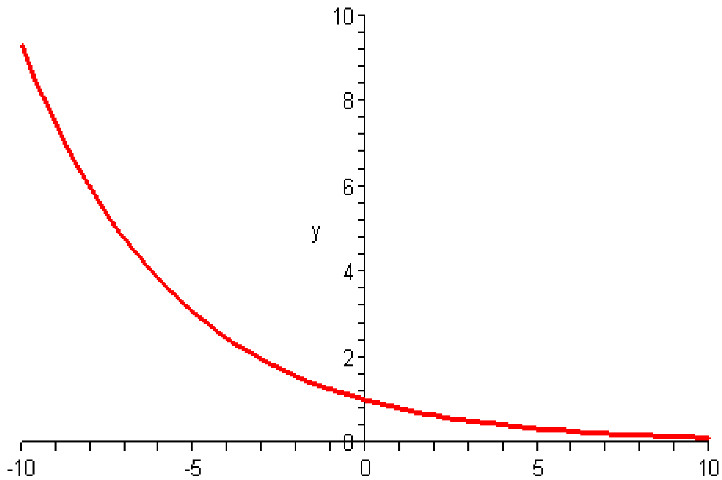
მაჩვენებლიანი ფუნქციის ძირითადი თვისებები

1. მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y) = \mathbb{R}$;

2. მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(y)=(0,+\infty)$;
3. თუ $a>1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია ზრდადია მთელს განსაზღვრის არეზე, ხოლო თუ $0<a<1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია კლებადია ასევე მთელს განსაზღვრის არეზე;
4. $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$;
5. $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$;
6. $(ab)^x=a^x\cdot b^x$;
7. $(\dfrac{a}{b})^x=\dfrac{a^x}{b^x}$;
8. $(a^x)^y=a^{xy}$;
9. მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე: ა) სურათზე $y=2^x$ ფუნქციის მაგალითზე მოცემულია $a>1$ შემთხვევის თვისობრივი სურათი, ხოლო ბ) სურათზე კი მოცემულია $0<a<1$ შემთხვევის თვისობრივი სურათი $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ ფუნქციის მაგალითზე.



ა)

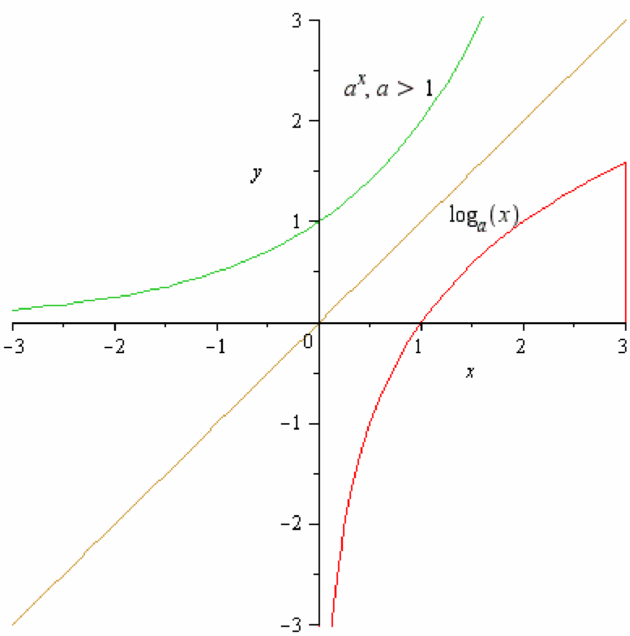


ბ)

ლოგარითმული ფუნქცია

განსაზღვრება 2. 2. *დადებითი b რიცხვის ლოგარითმი $a>0,\ a\neq 1$ ფუძით ეწოდება ისეთ c რიცხვს, რომ $a^c=b$. მას გამოსახავენ $c=\log_a b$ სახით.*

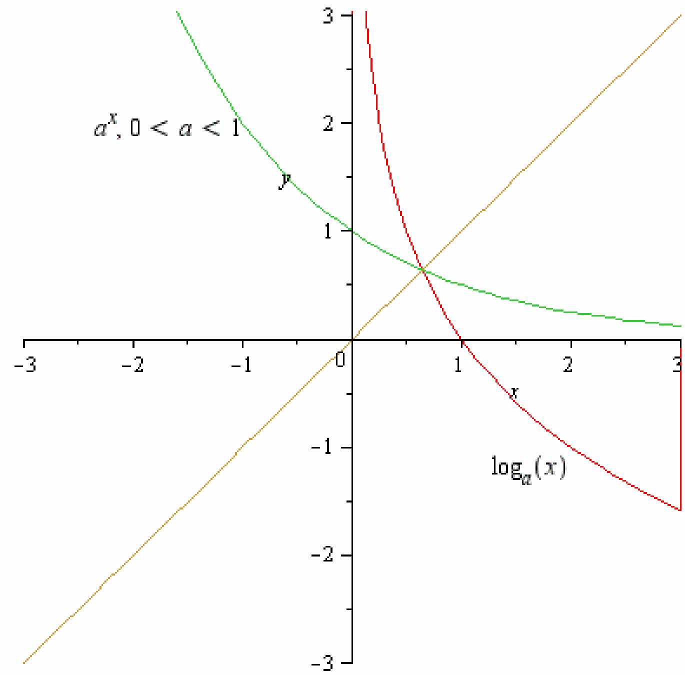
განსაზღვრება 2. 3. *ვთქვათ $a>0$ და $a\neq 1$ რაიმე ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია. მაშინ ასახვას $\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, რომელიც $x>0$ რიცხვს შეუსაბამებს $\log_a x$ რიცხვს, ეწოდება a ფუძის მქონე ლოგარითმული ფუნქცია. მას მოკლედ $y=\log_a x$ სახით წერენ.*



შენიშვნა 2. 10. *ლოგარითმული ფუნქცია წარმოადგენს მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას. ამიტომ მისი გრაფიკი მიიღება მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკისაგან $y=x$ წრფის მიმართ სიმეტრიით.*

ლოგარითმული ფუნქციის ძირითადი თვისებები

1. ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(\log_a)=(0,+\infty)$ შუალედი;
2. ლოგარითმული ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\log_a)=\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
3. თუ $a>1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია მთელს განსაზღვრის არეზე, ხოლო თუ $0<a<1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია კლებადია ასევე მთელს განსაზღვრის არეზე;
4. $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$;
5. თუ $x\cdot y>0$, მაშინ $\log_a(x\cdot y)=\log_a|x|+\log_a|y|$, ;
6. თუ $x\cdot y>0$, მაშინ $\log_a(\frac{x}{y})=\log_a|x|-\log_a|y|$;



7. $\forall p,q\in\mathbb{R}$, $q\neq 0$ და $x>0$ ნამდვილი რიცხვებისათვის, $\log_{a^q} x^p=\frac{p}{q}\log_a x$;
8. თუ $c>0$, $c\neq 1$, მაშინ $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$;
9. $a^{\log_a b}=b$, $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$;

მოქმედებები ფუნქციათა გრაფიკებზე

ამოცანა 1. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $y = -f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არიდან ავიღოთ რაიმე $x = x_0$ წერტილი. $y = -f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x = x_0$ წერტილზე იქნება $-f(x_0)$. წერტილი $M = (x_0, f(x_0))$ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის, ხოლო წერტილი $N = (x_0, -f(x_0))$ $y = -f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. ეს წერტილები სიმეტრიული წერტილებია OX ღერძის მიმართ. მაშასადამე $y = -f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი OX ღერძის მიმართ სიმეტრიული ფიგურებია.

ამოცანა 2. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $y = |f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. გვაქვს

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0; \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

მაშასადამე $y = |f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი ემთხვევა $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, განსაზღვრის არის იმ წერტილებში სადაც $f(x) \geq 0$ და ემთხვევა $y = -f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს განსაზღვრის არის იმ წერტილებში სადაც $f(x) < 0$.

ამოცანა 3. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $y = f(x) + b$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $x = x_0$ წერტილში პირველი ფუნქცია ღებულობს მნიშვნელობას $f(x_0)$, ხოლო მეორე ფუნქცია $f(x_0) + b$. წერტილები $M = (x_0, f(x_0))$ და $M = (x_0, f(x_0) + b)$ ეკუთვნიან შესაბამისად $y = f(x)$ და $y = f(x) + b$ ფუნქციის გრაფიკებს. N წერტილი შეგვიძლია მივიღოთ M წერტილის პარალელური გადატანით OY ღერძის გასწვრივ b ერთეულით ზემოთ თუ $b > 0$ და $|b|$ ერთეულით ქვემოთ თუ $b < 0$. მაშასადამე $y = f(x) + b$ ფუნქციის გრაფიკის მისაღებად $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი უნდა

გადავიტანოთ პარალელურად OY ღერძის გასწვრივ ზემოთ თუ $b>0$ და ქვემოთ თუ $b<0$.

ამოცანა 4. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $y=f(x-a)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $x=x_0$ წერტილში პირველი ფუნქცია ღებულობს მნიშვნელობას $f(x_0)$, ხოლო მეორე ფუნქცია მიიღებს იგივე მნიშვნელობას $x=x_0+a$ წერტილში ვინაიდან $f(x_0)=f((x_0+a)-a)$.
მაშასადამე $M=(x_0,f(x_0))$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ხოლო $N=(x_0+a,f(x_0))$ ეკუთვნის $y=f(x-a)$ ფუნქციის გრაფიკს. N წერტილი შეიძლება მივიღოთ M წერტილის პარალელური გადატანით OX ღერძის გასწვრივ მარჯვნივ a ერთეულით თუ $a>0$ და მარცხნივ $|a|$ ერთეულით თუ $a<0$. მაშასადამე $y=f(x-a)$ ფუნქციის გრაფიკის მისაღებად $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი უნდა გადავიტანოთ პარალელურად OX ღერძის გასწვრივ მარჯვნივ თუ $a>0$ და მარცხნივ თუ $a<0$.

ამოცანა 5. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y=f(|x|)$ ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ. როცა $x\geq 0$ მაშინ $f(x)=f(|x|)$. მაშასადამე $y=f(|x|)$ ფუნქციის ასაგებად ავაგოთ ჯერ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $x\geq 0$; ხოლო შემდეგ მისი სიმეტრიული ფიგურა OY ღერძის მიმართ.

ამოცანა 6. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $y=kf(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

მოხსნა. ცხადია თუ $y=f(x)$ ფყნქციის გრაფიკის წერტილის ორდინატს გავამრავლებთ k ზე მივიღებთ $y=kf(x)$ ფუნქციის გრაფიკის შესაბამის ორდინატს. მაშასადამე $y=kf(x)$ ფუნქციის გრაფიკი როცა $k>1$ მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრფიკის k ჯერ "გაჭიმვით" და k ჯერ "შეკუმშვით" , როცა $0<k<1$ OY ღერძის გასწვრივ. თუ $k<0$, მაშინ საკმარისია ჯერ ავაგოთ $y=-kf(x)$ ფუნქციის გრაფიკი შენდეგ კი საძიებელი ფუნქციის გრაფიკი (ამოცანა 1).

ამოცანა 7. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $y=f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y = f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის k-ჯერ შეკუმშვით, როცა $k > 1$ და k-ჯერ გაჭიმვით, როცა $0 < k < 1$ OX ღერძის გასწვრივ. თუ $k < 0$ მაშინ $y = f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(-kx)$ ფუნქციის გრაფიკები OY ღერძის მიმართ სიმეტრიული ფიგურებია.

საილუსტრაციოთ განვიხილოთ ფუნქცია $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ რომელსაც წილად-წრფივ ფუნქციას უწოდებენ. სკოლის კურსიდან ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი $y = \dfrac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი რომელიც წარმოადგენს ჰიპერბოლას ($k \neq 0$). ვაჩვენოთ, რომ როცა $c \neq 0$ და $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$ მაშინ წილად წრფივი ფუნქციის გრაფიკი ჰიპერბოლაა.

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია წარმოდგენა

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \dfrac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x + \dfrac{d}{c}}.$$

ავღნიშნოთ $\dfrac{bc-ad}{c^2} = k$. მაშინ $y = \dfrac{a}{c} + \dfrac{k}{x + \dfrac{d}{c}}$ ფუნქციის გრაფიკი შეგვიძლია მივიღოთ $y = \dfrac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკიდან თანმიმდევრობით OX და მერე OY ღერძის გასწვრივ პარალელური გადატანით (ამოცანა 3, 4).

სავარჯიშოები

1. ქვემოთ მოცემული შესაბამისობებიდან გამოარკვიეთ რომელი წარმოადგენს ფუნქციას. თითოეული შესაბამისობა ჩაწერეთ წყვილების საშუალებით.

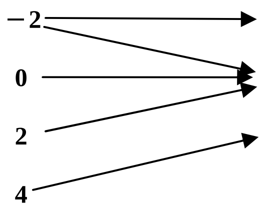
1) განსაზღვრის არე — მნიშვნელობათა არე

$$1 \to 5,\quad 2 \to 7,\quad 3 \to 9$$

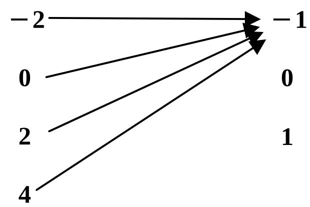
2) განსაზღვრის არე — მნიშვნელობათა არე

$$-2 \to -1,\quad 0 \to 0,\quad 2 \to 0,\quad 4 \to 1$$

3) განსაზღვრის არე — მნიშვნელობათა . არე



4) განსაზღვრის არე — მნიშვნელობათა .არე



2. ქვემოთ შესაბამისობები მოცემულია წყვილების საშუალებით. გამოარკვიეთ, რომელი მათგანი განსაზღვრავს ფუნქციას? დაადგინეთ თითოეულის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

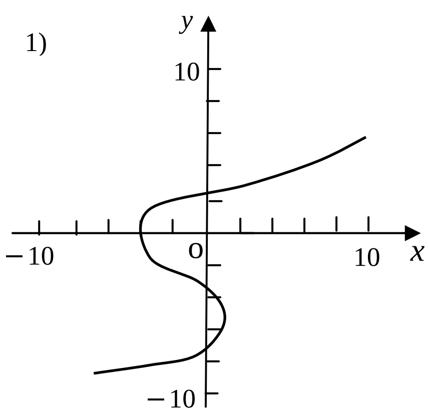
1) (2;3), (--7;5), (0;--1), (3;--1), (0;--5), (4;1);

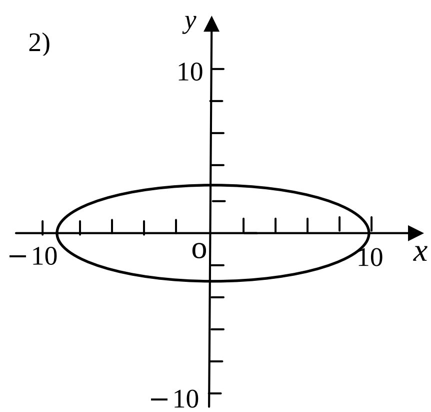
2) (--2;3), (7;--5), (0;--9), (3;--11), (3;5), (4;21)

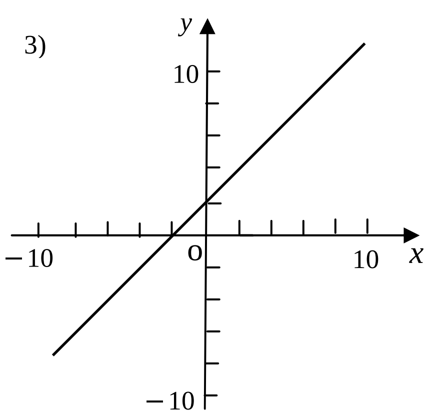
3) (12;3), (--17;5), (10;--1), (23;--1), (120;--5), (41;1);

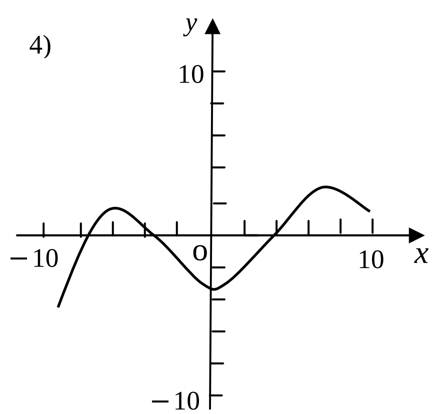
4) (31;23), (70;--5), (0;--9), (31;--11), (3;5), (44;21)

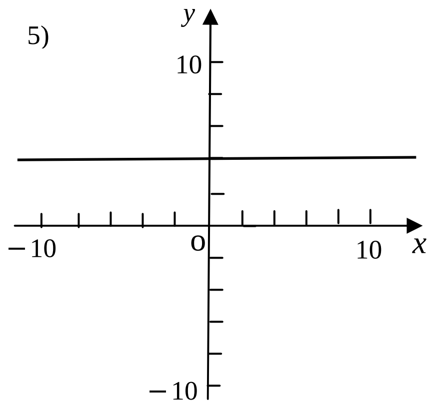
3. ქვემოთ მიმართებები მოცემულია გრაფიკულად. გამოარკვიეთ, რომელი მათგანი განსაზღვრავს ფუნქციას.

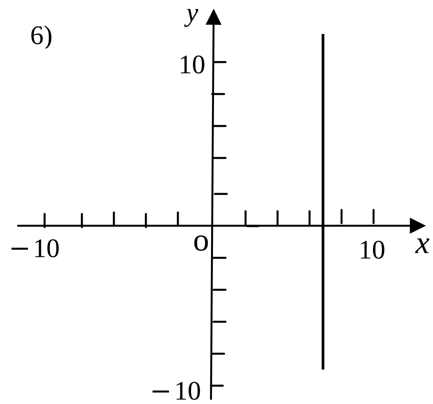












4. ქვემოთ მოცემული მიმართებებისათვის დაადგინეთ განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე, ააგეთ გრაფიკი და გაარკვიეთ არის თუ არა მოცემული მიმართება ფუნქცია. 1) $H=\{(x,y)\,|\,y=\frac{x}{2},\ x\in\{-4,-2,0,2,4\}\}$;

2) $R=\{(x,y)\,|\,y=x+3,\ x\in\{-3,-1,0,2\}\}$;

3) $F=\{(x,y)\,|\,0\le y\le x,\ 0\le x\le 3,\ x,y\in\mathbb{Z}\}$;

4) $G=\{(x,y)\,|\,0\le y\le|x|,\ -2\le x\le 2,\ x,y\in\mathbb{Z}\}$.

ვთქვათ f ფუნქცია მოცემულია ფორმულით $f(x)=3x-2$, გამოთვალეთ:

1) $f(2)$, $f(1)$, $f(-2)$; 2) $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$.

5. ვთქვათ f ფუნქცია მოცემულია ფორმულით $f(x)=6-x$, გამოთვალეთ:

1) $f(6)$, $f(-3)$, $f(-2)$; 2) $f(-1)$, $f(0)$, $f(m)$.

6. ვთქვათ g ფუნქცია მოცემულია ფორმულით $g(x)=x-x^2$, გამოთვალეთ:

1) $g(2)$, $g(1)$, $g(-2)$; 2) $g(-5)$, $g(0)$, $g(4)$.

7. ვთქვათ მოცემულია ოთხი ფუნქცია: $f(x)=10x-7$, $g(t)=6-2t$, $h(u)=3u^2$ და

$F(v)=v-v^2$. გამოთვალეთ:

1) $f(3)+g(2)$; 2) $F(2)+h(3)$;

3) $2g(-1)-3h(-1)$; 4) $4F(-2)-h(-3)$;

5) $\dfrac{f(2)\cdot g(-4)}{F(-1)}$; 6) $\dfrac{h(-1)\cdot F(2)}{g(-1)}$;

7) $g(u-2)$; 8) $F(2+k)$;

9) $\dfrac{f(3+t)-f(3)}{t}$; 10) $\dfrac{F(2+t)-F(2)}{t}$;

11) $F(g(1))$; 12) $G(g(2))$; 13) $g(f(x))$;

14) $f(G(v))$; 15) $g(G(0))$; 16) $f(g(t))$.

8. ვთქვათ $f(x)=5x$. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი ტოლობები?

1) $f(at)=af(t)$, $\forall a,t\in\mathbb{R}$;

2) $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$;

3) $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

9. ვთქვათ $f(x)=x^2$. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი ტოლობები?

1) $f(at)=af(t)$, $\forall a,t\in\mathbb{R}$;

2) $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$;

3) $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

10. განსაზღვრეთ a, b და c რიცხვები ისე, რომ პარაბოლას რომლის განტოლება არის $y=ax^2+bx+c$, ჰქონდეს წვერო $(1;2)$ წერტილში და გადიოდეს $(0;3)$ წერტილზე.

11. განსაზღვრეთ a, b და c რიცხვები ისე, რომ პარაბოლას რომლის განტოლება არის $y=ax^2+bx+c$, ჰქონდეს წვერო $(1;-2)$ წერტილში და გადიოდეს $(-1;2)$ წერტილზე.

12. ა) იპოვეთ b და c, თუ $y=-x^2+bx+c$ ფუნქცია ნული ხდება მხოლოდ $x=-2$ მნიშვნელობისათვის.

ბ) იპოვეთ b და c, თუ $y=-x^2+bx+c$ პარაბოლა აბსცისთა ღერძს ეხება $(-6;0)$ წერტილში.

13. იპოვეთ b და c, თუ $y=-x^2+bx+c$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 3, რომელსაც ის ღებულობს $x=0$ წერტილში.

14. იპოვეთ f ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მითითებულ შუალედებში:

ა) $f(x)=x^2-3x+9$, $x\in[0,4]$; ბ) $f(x)=-x^2-4x+9$, $x\in[-2,4]$;

გ) $f(x)=-3x^2+4x+11$, $x\in[-3,5]$; დ) $f(x)=3x^2+2x-17$, $x\in[-3,6]$.

15. გამოარკვიეთ, რამდენი საერთო წერტილი აქვს f და g ფუნქციათა გრაფიკებს და იპოვეთ ისინი:

ა) $f(x)=x^2-3x+9$, $g(x)=2x-3$;

ბ) $f(x)=-x^2-4x+9$, $g(x)=2x-5$;

გ) $f(x) = -3x^2 + 4x + 11$, $g(x) = 10x + 14$;

დ) $f(x) = 3x^2 + 2x - 17$, $g(x) = -x^2 + 2x - 7$.

16. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც f ფუნქციის გრაფიკი ეხება აბსცისათა ღერძს:

ა) $f(x) = ax^2 + (2a - 3)x + 7$; ბ) $f(x) = (a-1)x^2 - (a-4)x + 7 - 2a$.

დახაზეთ შემდეგი კვადრატული ფუნქციების გრაფიკები. მიუთითეთ სიმეტრიის ღერძი, წვეროს კოორდინატები და მინიმალური ან მაქსიმალური მნიშვნელობები.

17. 1) $f(x) = x^2 + 8x + 16$; 2) $h(x) = x^2 - 2x - 3$;

3) $f(u) = u^2 - 2u + 4$; 4) $f(x) = x^2 - 10x + 25$;

5) $h(x) = 2 + 4x - x^2$; 6) $g(x) = -x^2 - 6x - 4$;

7) $f(x) = 6x - x^2$; 8) $G(x) = 16x - 2x^2$;

9) $F(s) = s^2 - 4$; 10) $g(t) = t^2 + 4$;

11) $F(x) = 4 - x^2$; 12) $G(x) = 9 - x^2$.

18. დახაზეთ შემდეგი კვადრატული ფუნქციების გრაფიკები. მიუთითეთ სიმეტრიის ღერძი, წვეროს კოორდინატები და მინიმალური ან მაქსიმალური მნიშვნელობები.

1) $f(x) = x^2 - 7x + 10$; 2) $g(t) = t^2 - 5t + 2$;

3) $g(t) = 4 + 3t - t^2$; 4) $h(x) = 2 - 5x - x^2$;

5) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$; 6) $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$;

7) $f(x) = -2x^2 - 8x - 2$; 8) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$.

ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

19. ა) $y = \sin x$; ბ) $y = \sin 2x$;

გ) $y = -\sin 3x$; დ) $y = \sin\frac{x}{2}$.

20. ა) $y = 2\sin x$; ბ) $y = -3\sin x$;

გ) $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$; დ) $y = 3\sin\frac{x}{3}$.

21. ა) $y = \sin x + 1$; ბ) $y = \sin x - 1$;

გ) $y = 2\sin x - 3$; დ) $y = 3\sin x - 1$.

22. ა) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$; ბ) $y = -2\sin(x - \frac{\pi}{4})$;

გ) $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})-1;$ დ) $y=2\sin(x-\frac{\pi}{6})+1.$

23. ა) $y=\cos x;$ ბ) $y=-\cos 2x;$
გ) $y=\cos 3x;$ დ) $y=\cos\frac{x}{3}.$

24. ა) $y=2\cos x;$ ბ) $y=-2\cos x;$
გ) $y=2\cos\frac{x}{2};$ გ) $y=-3\cos\frac{x}{2}.$

25. ა) $y=\cos x+1;$ ბ) $y=-\cos x+2;$
გ) $y=2\cos x-1;$ დ) $y=-2\cos x+3.$

26. ა) $y=\cos(x-\frac{\pi}{3});$ ბ) $y=-\cos(x+\frac{\pi}{4});$
გ) $y=\cos(x-\frac{\pi}{6})-1;$ დ) $y=2\cos(x+\frac{\pi}{6}).$

27. ა) $y=tgx;$ ბ) $y=tg2x;$
გ) $y=tg\frac{x}{2};$ დ) $y=-tg3x.$

28. ა) $y=2tgx;$ ბ) $y=-3tgx;$
გ) $y=2tg\frac{x}{3};$ დ) $y=-3tg\frac{x}{2}.$

29. ა) $y=tgx+1;$ ბ) $y=tgx-2;$
გ) $y=2tgx+1;$ დ) $y=3tgx-2.$

30. ა) $y=tg(x+\frac{\pi}{4});$ ბ) $y=-tg(x+\frac{\pi}{3});$
გ) $y=-2tg(x+\frac{\pi}{6});$ დ) $y=tg(x+\frac{\pi}{4})-1.$

31. ა) $y=ctgx;$ ბ) $y=ctg2x;$
გ) $y=2ctgx;$ დ) $y=ctgx+1.$

32. ა) $y=|\sin x|;$ ბ) $y=|\cos x|;$
გ) $y=\sin|x|;$ დ) $y=\cos|x|.$

33. ა) $y=|tgx|;$ ბ) $y=|ctgx|;$
გ) $y=tg|x|;$ დ) $y=ctg|x|.$

ლუწია თუ კენტი ფუნქცია?

34. ა) $y=\sin x$, $y=\sin^2 x$, $y=\sin 2x$, $y=|\sin x|$;
ბ) $y=\cos x$, $y=\cos 2x$, $y=\cos^3 x$, $y=\cos x\cdot\sin x;$
გ) $y=tgx;$ $y=tg^2x;$ $y=tg^3x;$ $y=ctgx;$

დ) $y=\dfrac{2\sin^3 x}{1+\cos x}$, $y=\dfrac{\sin^2 x+\cos x}{x^3}$, $y=\dfrac{x^2+\cos x}{x^2-\cos x}$, $y=\sin^3 x+\dfrac{1}{tgx}$.

იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

35. ა) $y=\sin(x+1)$; ბ) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$;

გ) $y=2\sin x$; დ) $y=1+\sin x$.

36. ა) $y=\sin 2x$; ბ) $y=\sin\dfrac{x}{3}$;

გ) $y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$; დ) $y=\sin(4\pi x)$.

37. ა) $y=\cos^2 x$; ბ) $y=\cos 3x$;

გ) $y=\cos\dfrac{x}{5}$; დ) $y=\cos\pi x$.

38. ა) $y=ctg\dfrac{x}{4}$; ბ) $y=tg5x+3$;

გ) $y=tg3\pi x$; დ) $y=ctg(\pi x+1)$.

იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

39. ა) $\dfrac{1}{1-\sin x}$; ბ) $\dfrac{1}{\cos x}$;

გ) $\sin\dfrac{1}{x}$; დ) $\cos\dfrac{1}{1-x^2}$.

40. ა) $\dfrac{1}{1-tgx}$; ბ) $ctg\dfrac{\pi}{x}$;

გ) $\dfrac{1}{tgx}$; დ) $\dfrac{1}{tg3x}$.

იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები:

41. ა) $2\sin x-3$; ბ) $-3\cos 4x+5$;

გ) $\sin^2 3x+4$; დ) $-2\cos^2 x+1$.

42. ა) $\sin x+\cos x$; ბ) $\cos x-\sin x$;

გ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x$; დ) $\cos x-\sqrt{3}\sin x$.

43. იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის (მაქსიმალური სიგრძის) ინტერვალები:

. ა) $\sin 3x$; ბ) $\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$;

გ) $\cos\dfrac{x}{3}$; დ) $\cos(2x-\dfrac{\pi}{4})$;

ე) $tg2x$; ვ) $tg(\frac{\pi}{4}-2x)$.

ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი:

44. ა) $y=2^x$; ბ) $y=3^{-x}$; გ) $y=4^x$; დ) $y=10^x$.

45. ა) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; ბ) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; გ) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$; დ) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

46. ა) $y=2^{x+1}$; ბ) $y=3^{x-1}$; გ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$; დ) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

47. ა) $y=2^x+3$; ბ) $y=4^x-5$; გ) $y=2^{x+1}-1$; დ) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}+2$.

48. ა) $y=\log_2 x$; ბ) $y=\log_3(-x)$; გ) $y=\log_5 x$; დ) $y=\lg x$.

49. ა) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; ბ) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$; გ) $y=\log_{\frac{2}{5}}(-x)$; დ) $y=\log_{0,1} x$.

50. ა) $y=\log_2(x+1)$; ბ) $y=\log_2(3-x)$;
გ) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$; დ) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-5)$.

51. ა) $y=\log_2(x+1)-3$; ბ) $y=2\log_3(x+1)+5$;
გ) $y=2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+1$; დ) $y=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+1)-3$.

52. ა) $y=2^{|x|}$; ბ) $y=3^{|x-2|}$; გ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}$; დ) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}$.

53. ა) $y=\log_2|x|$; ბ) $y=\log_2|x+3|$;
გ) $y=|\log_2 x|$; დ) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}(x-4)\right|$.

იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

54. ა) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$; ბ) $y=\sqrt{x^2+3x-10}$;
გ) $y=\sqrt{\frac{x+2}{5-x}}$; დ) $y=\sqrt{x^2+4x+5}$.

55. ა) $\log_2(x+1)$; ბ) $\log_{0,6}(7-3x)$;
გ) $\log_\pi(x^2-4)$; დ) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x-3)$.

56. ა) $\log_2\frac{2-x}{x+1}$; ბ) $\log_{0,9}\frac{2x+5}{x-1}$;
გ) $\log_8\frac{7-2x}{2-3x}$; დ) $\log_{\sqrt{3}}\frac{x}{2-x}$.

57. ა) $\log_2\frac{|x|}{3-x}$; ბ) $\log_{0,7}\frac{|2x-5|}{6-x}$

გ) $\log_{0,7} \frac{|x|}{3-x^2}$; დ) $\log_{\pi}(|x-1|-4)$.

58.. იპოვეთ $f(2),\ f(x^2+1),\ f(3x+5)$, თუ

ა) $f(x)=\frac{2x+1}{3x+3}$ ბ) $f(x)=\sqrt{x+2}$

გ) $f(x)=5x+7$ დ) $f(x)=x^2+3$

59. იპოვეთ $f\circ g, g\circ f, f\circ f, g\circ g$, თუ

ა) $f(x)=\frac{2x+1}{3x+3}$ $g(x)=5x+9$

ბ) $f(x)=x^2+5x+3$ $g(x)=3x+9$

გ) $f(x)=2x-x^2$ $g(x)=\sin x$

დ) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ $g(x)=x^2$

ე) $f(x)=x^2$ $g(x)=2^x$

ვ) $f(x)=|x|$ $g(x)=\cos x$

60. იპოვეთ $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$ და $g(g(x))$, თუ

ა) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x, & x>0.\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$

ბ) $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$; $g(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x^2, & x\ge 0.\end{cases}$

გ) $f(x)=2(x-|x|)$; $g(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x^2, & x\ge 0.\end{cases}$

დ) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2;\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$

61. იპოვეთ $f^{-1}(x)$, თუ

ა) $f(x)=3x-1$ ბ) $f(x)=\frac{2x+1}{3x+3}$

გ) $f(x)=\sqrt{3x+1}$ დ) $f(x)=x^3+2$

62. იპოვეთ $f^{-1}(x)$, თუ

ა) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\ge 0;\\ 2x+1, & x<0;\end{cases}$ ბ) $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\ge 1;\\ -2x+3, & x<1;\end{cases}$

გ) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1;\\ x^2, & 1\le x\le 2;\\ 3x-2, & x>2.\end{cases}$ დ) $f(x)=\begin{cases}x, & x<1;\\ x^2, & 1\le x\le 4;\\ 2^x, & x>4.\end{cases}$

63. შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია ურთიერთცალსახა ფუნქცია

ა) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+3}$ ბ) $f(x)=2x-x^2$

გ) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ დ) $f(x)=\sqrt{x+2}$

64. ააგეთ f ფუნქციისა და მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკი, თუ

ა) $f(x)=3x-8$ ბ) $f(x)=x^2+2,\ x\in[0,+\infty)$

გ) $f(x)=x^2-1,\ x\in[0,+\infty)$ დ) $f(x)=x$.

65. იპოვეთ $f(f(x))$ და $f(f(f(x)))$, თუ

ა) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. ბ) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

გ) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$; დ) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

66. ვთქვათ, $f(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, როცა $0<t<1$. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე:

ა) $f(\sin x)$; ბ) $f(\cos x)$;

გ) $f(\sin^2 x)$; დ) $f(\ln x)$.

67. იპოვეთ $f(x)$, თუ

ა) $f(x+1)=x^2-3x+2$; ბ) $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; $x\ne 0$;

გ) $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$; $x>0$. დ) $f(\dfrac{x}{x+1})=x^2$.

68. ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციებიდან რომელია კენტი და რომელი ლუწი:

ა) $f(x)=a^x+a^{-x}$

ბ) $f(x)=a^x-a^{-x}$

გ) $f(x)=\sqrt[3]{1-x+x^2}-\sqrt[3]{1+x+x^2}$

დ) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

ე) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

69. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$

ბ) $f(x) = A\cos kx + B\sin kx$

გ) $f(x) = \sqrt{|\cot x|}$

დ) $f(x) = tg\frac{x}{2} + tg\frac{x}{3}$

70. შემოსაზღვრულია თუ არა შემდეგი ფუნქციები

ა) $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$

ბ) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

გ) $f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad D(f) = [2,3]$

დ) $f(x) = tg\frac{x}{2}$

71. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმის წერტილები

ა) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,2] \\ 2, & x \in (2,3] \\ 5-x, & x \in (3,5] \\ x-5, & x \in (5,+\infty) \end{cases}$

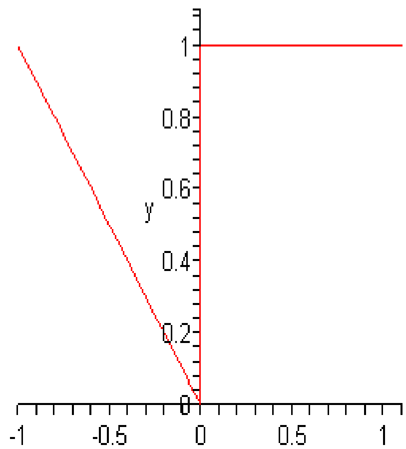
ბ) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-5,2] \\ 2, & x \in (2,3] \\ 5-x, & x \in (3,5] \\ x-5, & x \in (5,10] \end{cases}$

გ) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in [2,3] \\ 2, & x \in (3,4] \\ 6-x, & x \in (4,5] \\ x-4, & x \in (5,10] \end{cases}$

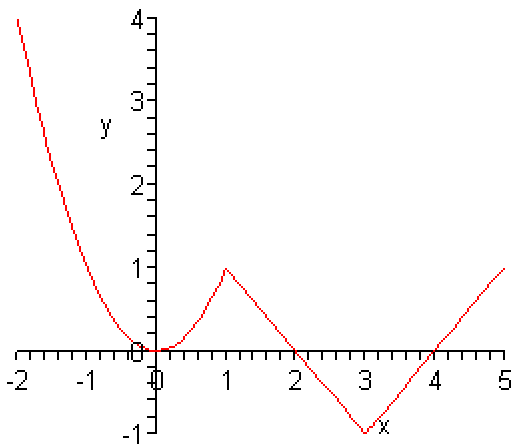
დ) $f(x) = x^2 + 2x, \ x \in [-2,2]$

72. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმის წერტილები

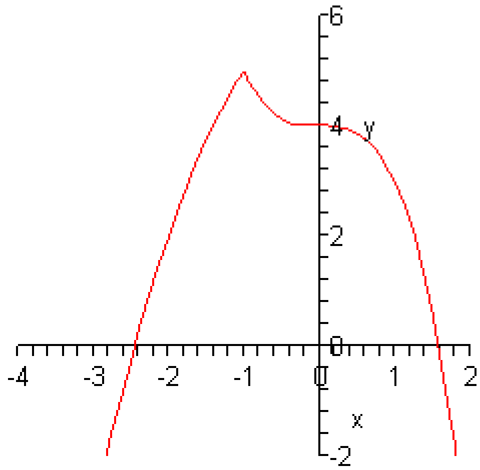
ა)



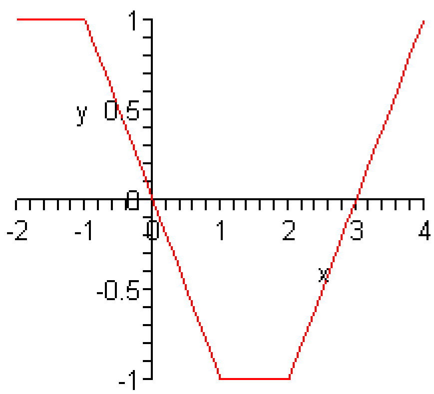
ბ)



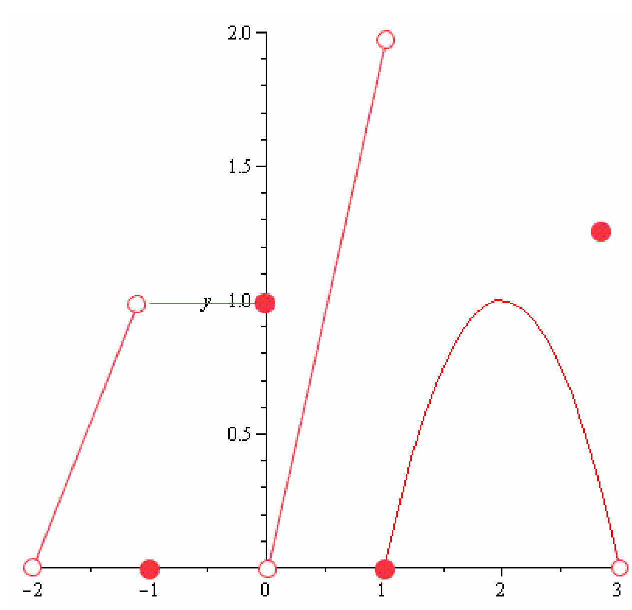
გ)



დ)

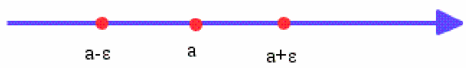


73. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმის წერტილები.



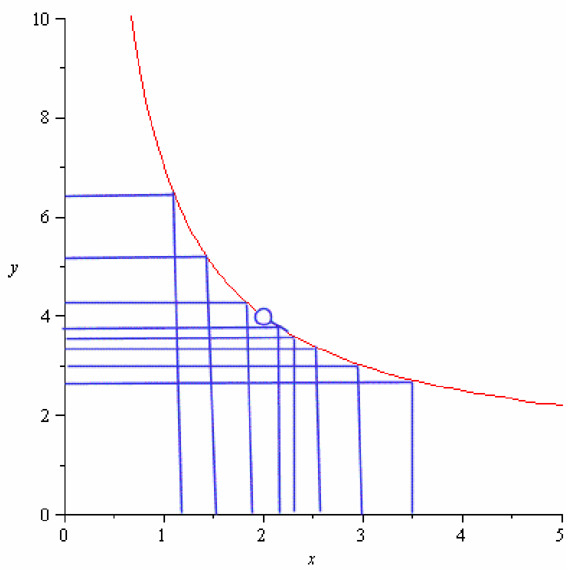
3. ფუნქციის ზღვარი

მაგალითი 3. 1. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$ და შევეცადოთ შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციის ყოფაქცევა $x=2$ წერტილის მიდამოში. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$. a წერტილის მიდამოს ვუწოდებთ $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ სახის ინტერვალს, სადაც ε დადებითი რიცხვია. განვიხილოთ $x=2$ წერტილის რაიმე მიდამო და ავიღოთ x-ის მნიშვნელობები $x=2$ წერტილთან იმდენად ახლოს, რომ ისინი მოხვდნენ მოცემულ მიდამოში, შემდეგ კი ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებში.



x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	3.4	1.5	5.0
2.1	3.857142857	1.9	4.157894737
2.01	3.985074627	1.99	4.015075377
2.001	3.998500750	1.999	4.001500750
2.0001	3.999850007	1.9999	4.000150008
2.00001	3.999985000	1.99999	4.000015000

როგორც ამ ცხრილიდან ვხედავთ, თუ ავიღებთ x-ს $x=2$ წერტილის მარჯვნივ და ვამოძრავებთ $x=2$-კენ, ფუნქციის მნიშვნელობები მიუახლოვდებიან 4-ს. ანალოგიურად, თუ ავიღებთ x-ს $x=2$ წერტილის მარცხნივ და ვამოძრავებთ $x=2$-კენ, ფუნქციის მნიშვნელობები ისევ მიუახლოვდებიან 4-ს. ე.ი. f ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 4-ს, როცა x წერტილები უახლოვდებიან $x=2$ წერტილს. ამ პროცესს მივყავართ **ფუნქციის ზღვრის** ცნების ინტუიციურ წარმოდგენამდე და მისთვის გვაქვს შემდეგი აღნიშვნა:



$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}=4.$$

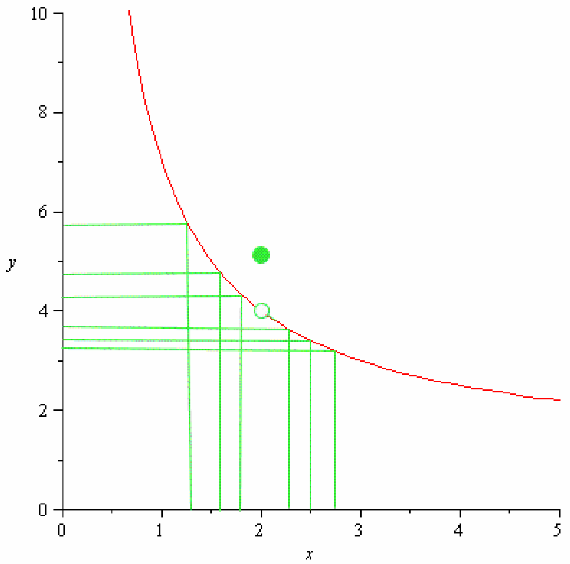
ამრიგად, ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის ზღვარი $x=a$ წერტილში არის A, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ A-ს, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $\lim_{x\to a}f(x)=A$ ან, $f(x)\to A$, როცა $x\to a$.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ეს განმარტება არ არის ზღვრის მკაცრი განმარტება. იგი გვეხმარება, გავერკვეთ ფუნქციის ზღვრის არსში. და მაინც, უფრო ზუსტად, რას გულისხმობს ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა. ვთქვათ, ვიცით, რომ ზღვარი არსებობს და ის არის A. წინასწარ განვსაზღვროთ A-თან რა სიახლოვეში გვინდა იყოს $f(x)$. ვთქვათ, გვინდა $f(x)$ იყოს A-დან არაუმეტეს 0.001 ერთეულით დაშორებული. ეს კი ნიშნავს, რომ უნდა შესრულდეს ერთ-ერთი შემდეგი ორი დამოკიდებულებიდან

$$f(x)-A<0.001 \quad \text{თუ} \quad f(x)>A$$
$$A-f(x)<0.001 \quad \text{თუ} \quad f(x)<A$$

ე. ი. თუ x-ს საკმაოდ მივუახლოვებთ a-ს, მაშინ ზემოთ მოყვანილი დამოკიდებულებებიდან ერთ-ერთი შესრულდება.

მნიშვნელოვანია, შევნიშნოთ, რომ x-ის მნიშვნელობები უნდა ავიღოთ $x=a$ წერტილის ორივე მხარეს. ასევე შევნიშნოთ, რომ ზღვრის განმარტებაში ჩვენ არ ვიხილავთ $x=a$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობას. ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ ზღვარი საშუალებას გვაძლევს, მივიღოთ გარკვეული ინფორმაცია, რა ხდება $x=a$ წერტილის მიდამოში, მაგრამ ზღვრის მოსაძებნად არ არის საინტერესო, რა ხდება თვით a წერტილში. ეს ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მომენტია ზღვართან მიმართებაში, რაც კარგად უნდა გვახსოვდეს. ზემოთ ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში $x=2$ წერტილში ფუნქცია არ იყო განსაზღვრული, მაგრამ ამ წერტილში ჩვენ განვიხილეთ ფუნქციის ზღვარი. ახლა განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:



მაგალითი 3. 2. ვიპოვოთ $\lim_{x\to 2}g(x)$, თუ

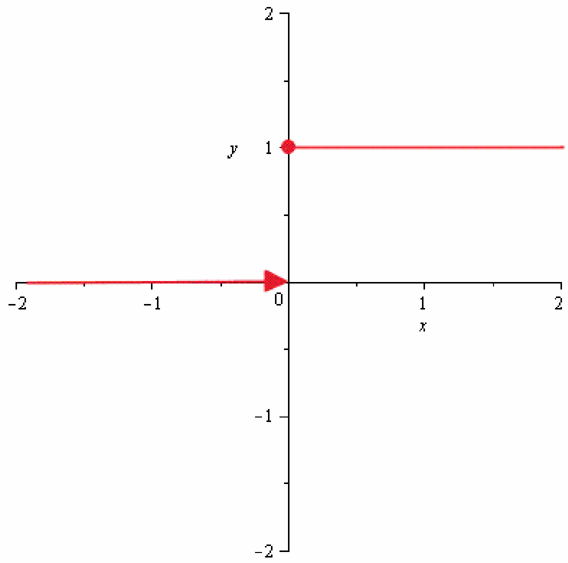
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ფუნქცია ზუსტად ის ფუნქციაა, რომელიც განხილული იყო პირველ მაგალითში იმ განსხვავებით, რომ $x=2$ წერტილში ამ ფუნქციის მნიშვნელობაა 5. თუ ჩავატარებთ იგივე მსჯელობას, რაც იყო პირველ მაგალითში, ვნახავთ, რომ

$$\lim_{x\to 2}g(x)=4.$$

მაგალითი 3. 3. ვიპოვოთ $\lim_{x\to 0}h(x)$, თუ

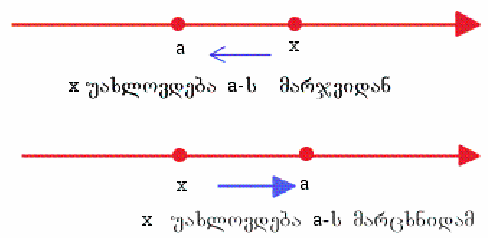
$$h(x) = \begin{cases} 0\,, \; x < 0 \\ 1\,, \; x \geq 0 \end{cases}$$



როგორც ვხედავთ, როცა $x = 0$ წერტილს ვუახლოვდებით მარჯვნიდან, ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 1-ს, ხოლო თუ $x = 0$-ს ვუახლოვდებით მარცხნიდან, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 0-ს. ფუნქციის ზღვრის განმარტების ძალით, ფუნქციის მნიშვნელობები უნდა მიუახლოვდნენ ერთ კონკრეტულ სიდიდეს, როცა x უახლოვდება a-ს (ორივე მხრიდან). ამ შემთხვევაში ეს არ ხდება. ე.ი. ამ ფუნქციას $x = 0$ წერტილში არა აქვს ზღვარი.

ცალმხრივი ზღვრები. როგორც ვნახეთ, მაგალით 3. 3 –ში მოცემულ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნიათ $x = 0$ წერტილში, რადგან ფუნქციის მნიშვნელობები არ უახლოვდებიან ერთ კონკრეტულ სიდიდეს, როცა განსაზღვრის არის წერტილები რაგინდ ახლოს არიან 0-თან. ამის მიზეზი არის ის, რომ ფუნქციის მნიშვნელობები ორი სხვადასხვა რიცხვის ირგვლივ იყრიან თავს, იმის და მიხედვით, თუ რომელი მხრიდან უახლოვდებიან x-ები 0-ს. ამ შემთხვევას მივყავართ ე.წ. ცალმხრივ ზღვრებამდე.

მარჯვენა ზღვარი. ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან $x = a$ წერტილში არის A რიცხვი, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ A-ს, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან მარჯვნიდან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ ან, $f(x) \to A$, როცა $x \to a+$.



მარცხენა ზღვარი. ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან $x = a$ წერტილში არის A რიცხვი, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ A-ს, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან მარცხნიდან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$ ან, $f(x) \to A$, როცა $x \to a-$.

მაგალითი 3. 4. კიდევ ერთხელ დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ $h(x) = \begin{cases} 0\,, \; x < 0 \\ 1\,, \; x \geq 0 \end{cases}$ ფუნქციას.

როგორც ვხედავთ, თუ x მარჯვნიდან უახლოვდება 0-ს ($x > 0$), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 1-ს. ე.ი.

$$\lim_{x \to 0+} h(x) = 1$$

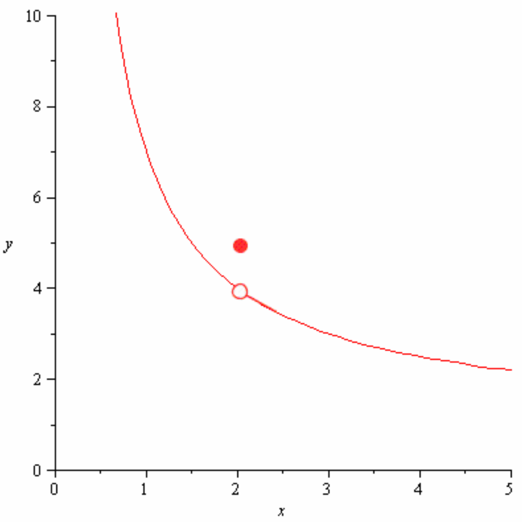
ანალოგიურად, თუ x მარცხნიდან უახლოვდება 0-ს ($x < 0$), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 0-ს. ე.ი.

$$\lim_{x\to 0-} h(x) = 0$$

ამ მაგალითში ცალმხრივი ზღვრები $x=0$ წერტილში არსებობს, თუმცა ფუნქციას ზღვარი არა აქვს.

მაგალითი 3. 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 2+} g(x)$ და $\lim\limits_{x\to 2-} g(x)$, თუ

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}, & x\neq 2 \\ 5, & x=2 \end{cases}$$



როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში $\lim\limits_{x\to 2+} g(x)=4$ და $\lim\limits_{x\to 2-} g(x)=4$. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=4$.

შევნიშნოთ, რომ ცალმხრივი ზღვრების შემთხვევაშიც საინტერესოა, რა ხდება წერტილის მიდამოში და არა თვით ამ წერტილში.

თუ დავაკვირდებით 3. 3 და 3. 4 მაგალითებს, ვხედავთ რომ პირველ შემთხვევაში ორივე ცალმხრივი ზღვარი არსებობს და ერთმანეთის ტოლი არაა მაშინ, როცა მეორე მაგალითში ორივე ცალმხრივი ზღვარი არსებობს და ერთმანეთის ტოლია, უფრო მეტიც, ისინი ფუნქციის ზღვრის ტოლია მოცემულ წერტილში. არსებობს გარკვეული კავშირი ცალმხრივ ზღვრებსა და ფუნქციის ზღვარს შორის. მართებულია შემდეგი

თეორემა 3. 1. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $y=f(x)$, რომლისთვისაც

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=A,$$

მაშინ არსებობს f ფუნქციის ზღვარი a წერტილში და

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,$$

და პირიქით, თუ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, მაშინ

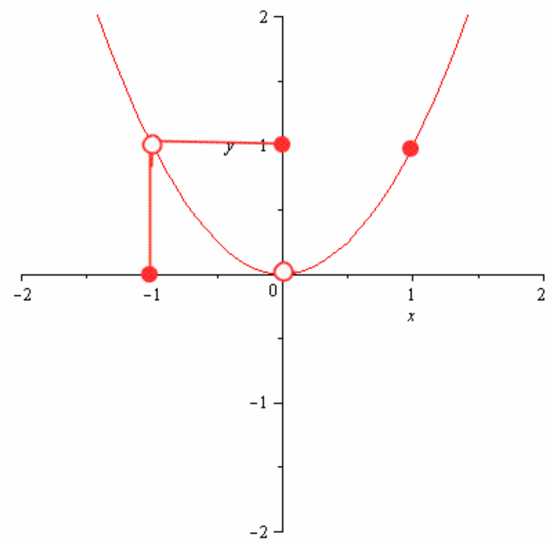
$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=A.$$

მაგალითი 3. 6. ვიპოვოთ ნახაზზე მოცემული ფუნქციის ზღვრები $x=-1, x=0, x=1$ წერტილებში. ადვილი დასანახია, რომ

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1.$

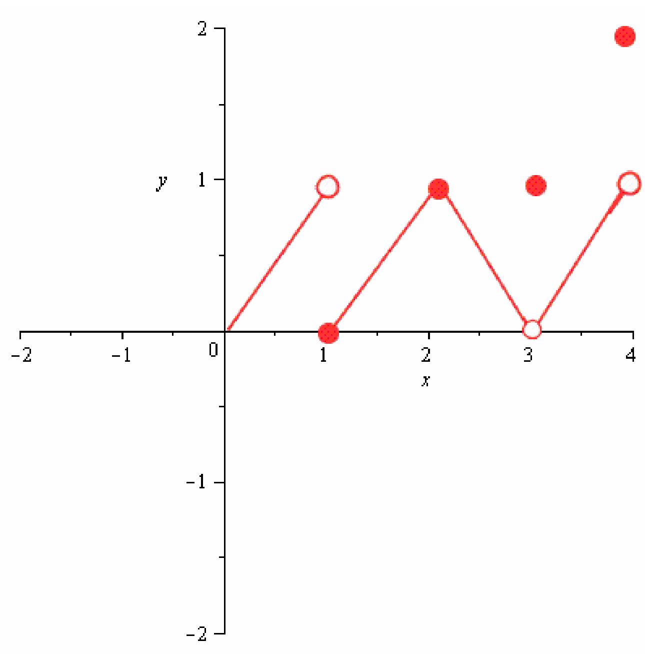
მეორეს მხრივ,

$f(-1)=0,\quad f(0)=1,\quad f(1)=1.$



მაგალითი 3. 7.

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=0,\quad f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 2} f(x)=1,\quad f(2)=1$$
$$\lim_{x\to 3} f(x)=0,\quad f(3)=1$$
$$\lim_{x\to 4-} f(x)=1,\quad f(4)=2$$



ფუნქციის ზღვრის თვისებები. ვთქვათ, მოცემულია $y=f(x)$ და $y=g(x)$ ფუნქციები. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს $\lim_{x\to a} f(x)$ და $\lim_{x\to a} g(x)$ და c რაიმე მუდმივია. მაშინ

1) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

სხვა სიტყვებით, მუდმივი მამრავლი გადის ზღვრის ნიშნის გარეთ.

2) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$

სხვა სიტყვებით, ჯამის (სხვაობის) ზღვარი ზღვართა ჯამის (სხვაობის) ტოლია.

3) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$

სხვა სიტყვებით, ნამრავლის ზღვარი ზღვართა ნამრავლის ტოლია.

4)

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\quad ,\ \text{თუ}\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

სხვა სიტყვებით, შეფარდების ზღვარი ზღვართა შეფარდების ტოლია, თუ მნიშვნელის ზღვარი არ უდრის ნულს.

5) $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\alpha} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\alpha}$, სადაც $\alpha\in R$ და f დადებითი ფუნქციაა. თუ $\alpha\in N$, მაშინ $\lim_{x\to a}[f(x)]^{n} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{n}$, სადაც f ნებისმიერი ფუნქციაა.

თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ ეს თვისება მე-3 თვისების შედეგია. მაგალითად, თუ $n=2$, მაშინ

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^2 = \lim_{x\to a}[f(x)f(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} f(x) = [\lim_{x\to a} f(x)]^2$$

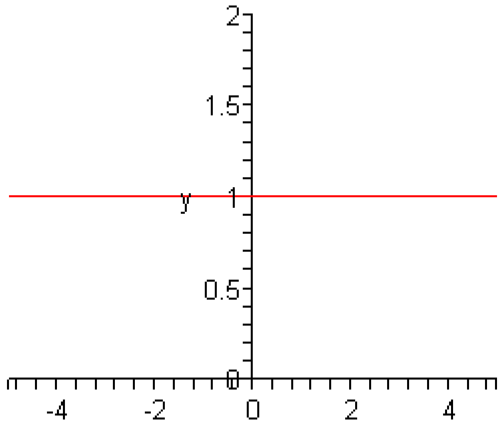
6) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

ეს თვისება მე-5 თვისების კერძო შემთხვევაა. მართლაც,

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{1}{n}}=[\lim_{x\to a}f(x)]^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

7) $\lim\limits_{x\to a}c=c$, სადაც c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

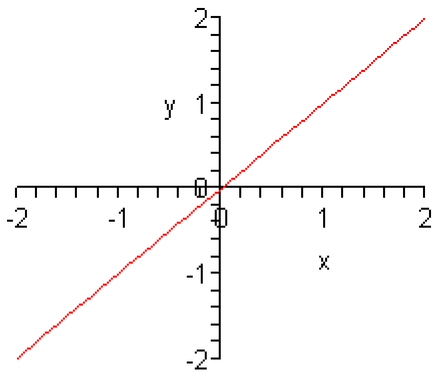
სხვა სიტყვებით, მუდმივი ფუნქციის ზღვარი თვით ამ მუდმივის ტოლია. მართლაც, განვიხილოთ $f(x)=c$ ფუნქცია და შევხედოთ მის გრაფიკს



ცხადია, რომ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$.

8) $\lim\limits_{x\to a}x=a$

განვიხილოთ $f(x)=x$ ფუნქცია და შევხედოთ მის გრაფიკს



ცხადია, რომ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$.

მაგალითი 3. 8. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2+5x-9)$

მე-2 თვისების ძალით

$$\lim_{x\to -2}(3x^2+5x-9)=\lim_{x\to -2}3x^2+\lim_{x\to -2}5x-\lim_{x\to -2}9$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ პირველ თვისებას, მაშინ გვექნება

$$\lim_{x\to-2}(3x^2+5x-9)=\lim_{x\to-2}3x^2+\lim_{x\to-2}5x-\lim_{x\to-2}9$$

$$=3\lim_{x\to-2}x^2+5\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}9$$

ახლა გამოვიყენოთ მე-7, მე-8, მე-9 თვისებები. მივიღებთ

$$\lim_{x\to-2}(3x^2+5x-9)=3\lim_{x\to-2}x^2+5\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}9$$

$$=3(-2)^2+5(-2)-9=-7$$

შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითში $p(x)=3x^2+5x-9$ პოლინომია და აღმოჩნდა, რომ $\lim_{x\to-2}p(x)=p(-2)=-7$. ეს შემთხვევითი არაა. საზოგადოდ მართებულია შემდეგი ფაქტი:
თუ $p(x)$ რაიმე $n-$ური ხარისხის პოლინომია, მაშინ

$$\lim_{x\to a}p(x)=p(a).$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to1}\frac{6-3x+10x^2}{-2x^4+7x^3+1}$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ შეგვიძლია მე-4 თვისების გამოყენება, რადგან $\lim_{x\to1}(-2x^4+7x^3+1)\neq0$. ე.ი.

$$\lim_{x\to1}\frac{6-3x+10x^2}{-2x^4+7x^3+1}=\frac{\lim_{x\to1}(6-3x+10x^2)}{\lim_{x\to1}(-2x^4+7x^3+1)}$$

$$=\frac{6-3(1)+10(1)^2}{-2(1)^4+7(1)^3+1}=\frac{13}{6}$$

ფაქტიურად, მოცემულ მაგალითშიც $x=1$ წერტილში ზღვრის დასათვლელად გამოვთვალეთ $f(x)=\dfrac{6-3x+10x^2}{-2x^4+7x^3+1}$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=1$ წერტილში.

არსებობს ფუნქციები, რომელთათვისაც $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. ამ საკითხს ქვემოთ კიდევ ერთხელ შევეხებით. მანამდე ჩამოვწეროთ ზოგიერთი გავრცელებული ფუნქცია, რომელთაც აქვთ ეს “კარგი” თვისება.

- პოლინომები
- $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, თუ $\lim_{x\to a}p(x)=p(a)$ და $\lim_{x\to a}q(x)=q(a)\neq0$
- $\cos x$, $\sin x$ ნებისმიერი x-თვის
- $\tan x$, თუ $x\neq\ldots,-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots$
- $\cot x$, თუ $x\neq\ldots,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots$
- $\sqrt[n]{x}$, თუ n კენტია
- $\sqrt[n]{x}$, თუ $x\geq0$ და n ლუწია
- a^x, e^x ნებისმიერი x-თვის
- $\log_b x$, $\ln x$, თუ $x>0$
- ზემოთ ჩამოთვლილი ფუნქციების ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი

შევეხოთ კიდევ ერთ საინტერესო ფაქტს, რომელიც დაგვეხმარება ზოგიერთი ზღვრის გამოთვლაში. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. 2. ვთქვათ ყოველი $x \in [a,b]$-თვის

$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

და

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = A,$$

სადაც $a \le c \le b$. მაშინ

$$\lim_{x \to c} h(x) = A$$

მაგალითი 3. 9. ვიპოვოთ შემდეგი ზღვარი

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

როგორც ვიცით $-1 \le \cos x \le 1$ ნებისმიერი x-თვის, ამიტომ გვექნება

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1,$$

საიდანაც ვღებულობთ

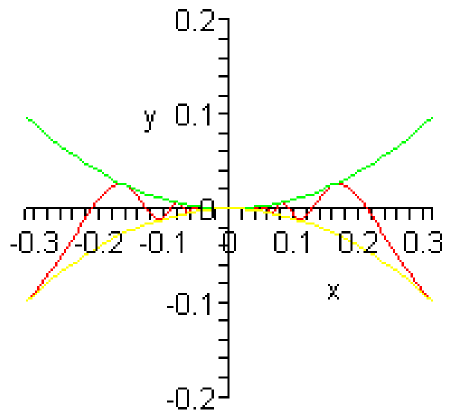
$$-x^2 \le x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$$

$$\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

ამიტომ თეორემა 2-ის ძალით

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

ამ ფაქტს შეიძლება გრაფიკზეც დავაკვირდეთ



მაგალითი 3. 10. ვთქვათ $5 - x^2 \le f(x) \le 5 + x^2$ ნებისმიერი $x \ne 0$-თვის. იპოვეთ $\lim_{x \to 0} f(x)$. რადგანაც $\lim_{x \to 0}(5 - x^2) = \lim_{x \to 0}(5 + x^2) = 5$, ამიტომ თეორემა 3. 2-ის ძალით $\lim_{x \to 0} f(x) = 5$.

უსასრულო ზღვრები. ვიტყვით, რომ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, თუ შეგვიძლია $f(x)$ გავხადოთ რაგინდ დიდი, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან და $x \ne a$. ანალოგიურად, ვიტყვით, რომ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, თუ შეგვიძლია $-f(x)$ გავხადოთ რაგინდ დიდი, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან და $x \ne a$.

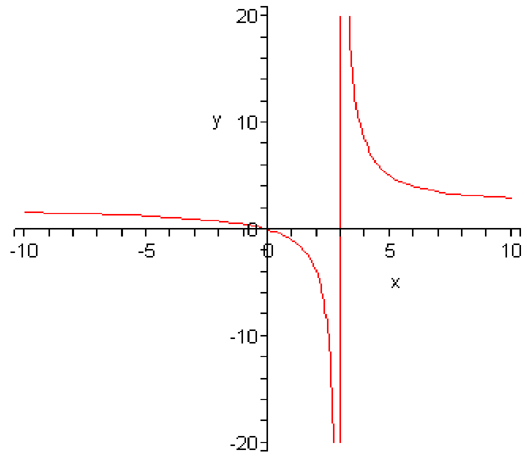
ვიტყვით, რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, თუ შეგვიძლია $|f(x)|$ გავხადოთ რაგინდ დიდი, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან და $x \neq a$.

ანალოგიური განმარტება გვექნება ცალმხრივი ზღვრების შემთხვევაშიც.

მაგალითი 3. 11. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 3-}\frac{2x}{x-3} \qquad \lim_{x\to 3+}\frac{2x}{x-3}$$

განვიხილოთ $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$ ფუნქციის გრაფიკი



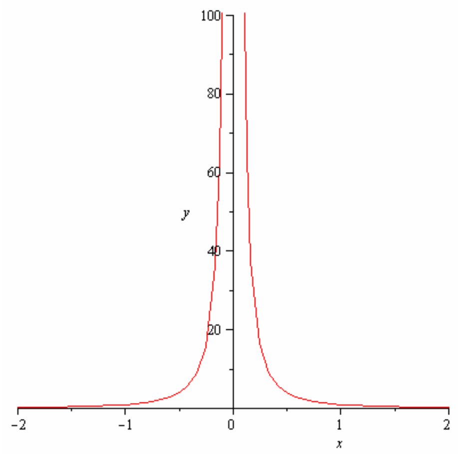
როგორც ვხედავთ, როცა $x\to 3-$, მაშინ $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}\to -\infty$, ხოლო როცა $x\to 3+$, მაშინ $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}\to +\infty$

ე.ი. $\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{2x}{x-3}=-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{2x}{x-3}=+\infty$, მაშასადამე $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\infty$.

მაგალითი 3. 12. ვთქვათ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

ადვილი დასანახია, რომ

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. ე. ი. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.



განსაზღვრება 3. 1 ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ ფუნქციას $x = a$ წერტილში აქვს ვერტიკალური ასიმპტოტი, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან

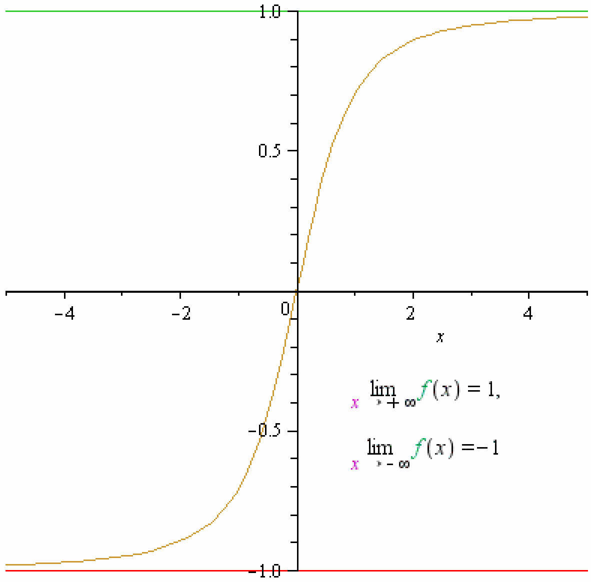
$$\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to -a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to +a} f(x) = \infty.$$

ჩვენს მიერ ზემოთ განხილულ მაგალით 3. 9-ში (როგორც ეს გრაფიკიდანაც ჩანს) $x = 3$ წრფე ვერტიკალური ასიმპტოტია.

ფუნქციის ზღვარი უსასრულობაში .

განსაზღვრება 3. 2 ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;+\infty)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to+\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = p$, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ p-ს, როცა x საკმარისად დიდია.

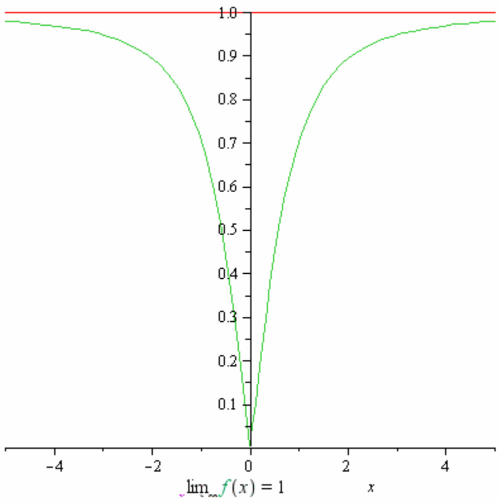
განსაზღვრება 3. 3 ვთქვათ, მოცემულია $f:(-\infty;a)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to-\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = p$, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ p-ს, როცა $-x$ საკმარისად დიდია.



განსაზღვრება 3. 4 ვთქვათ, მოცემულია $f:(-\infty;+\infty)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim_{x\to\infty} f(x) = p$, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ p-ს, როცა $|x|$ საკმარისად დიდია.

განსაზღვრება 3. 5. ა) ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;+\infty)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to+\infty$ არის $+\infty$ და ჩავწერთ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, თუ შეგვიძლია $f(x)$ გავხადოთ რაგინდ დიდი, როცა x საკმარისად დიდია.

ბ) ვთქვათ, მოცემულია $f:(-\infty;a)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to-\infty$ არის $+\infty$ და ჩავწერთ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, თუ შეგვიძლია $f(x)$ გავხადოთ რაგინდ დიდი, როცა $-x$ საკმარისად დიდია.



გ) ვთქვათ, მოცემულია $f:(-\infty;+\infty)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to\infty$ არის $+\infty$ და ჩავწერთ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, თუ შეგვიძლია $f(x)$ გავხადოთ რაგინდ დიდი, როცა $|x|$ საკმარისად დიდია.

ანალოგიურად ჩამოყალიბდება ზღვრის ცნებები, როცა ზღვრის მნიშვნელობა არის $-\infty$ ან ∞.

შევნიშნოთ, რომ თუ $r>0$, მაშინ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|^r}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|^r}=0$$

მაგალითი 3. 13. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x} \quad \text{და} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{6}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}$$

ვიცით, რომ

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

ამიტომ გვექნება

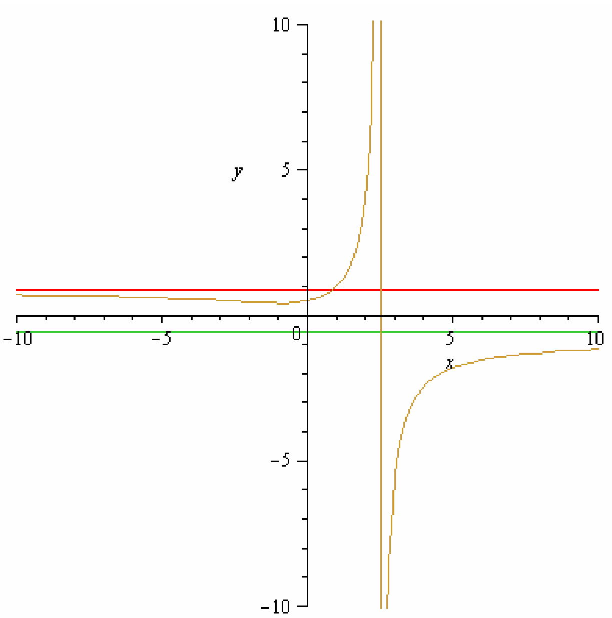
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{\frac{5}{x}-2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

განსაზღვრება 3. 6. ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქციას $y=A$ წერტილში აქვს ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

ე.ი. ჩვენს მიერ ახლა განხილულ $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$ ფუნქციას აქვს ორი ჰორიზონტალური ასიმპტოტი



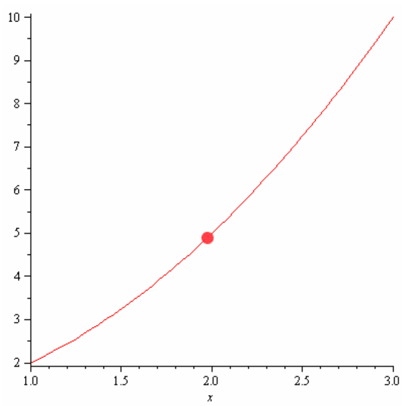
4. ფუნქციის უწყვეტობა

ჩვენ ზემოთ შევეხეთ “კარგ” ფუნქციებს, რომელთაც ის თვისება ჰქონდათ, რომ ამ ფუნქციების ზღვარი მოცემულ წერტილში ამავე წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია.

უწყვეტობა წერტილში. ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ და $a<c<b$ (ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ c არის $[a,b]$ სეგმენტის შიგა წერტილი)

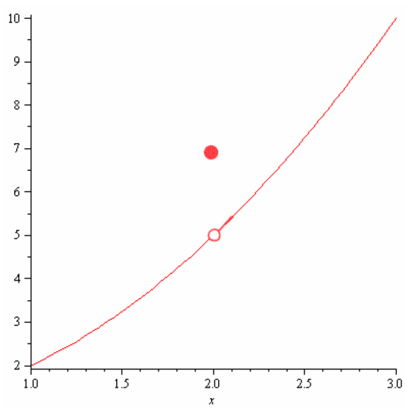
განსაზღვრება 4. 1. ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია c წერტილში, თუ

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$



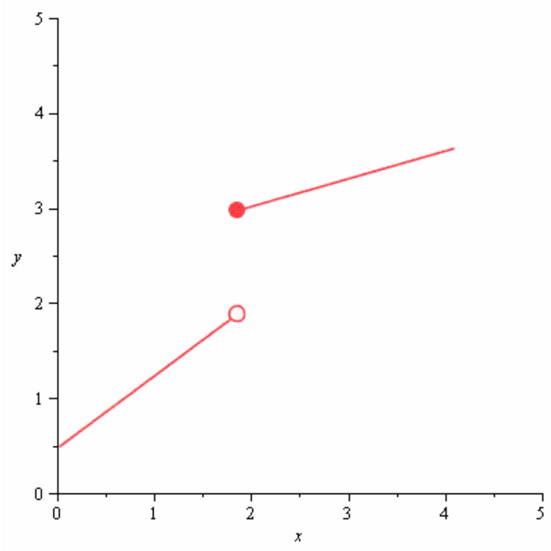
განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია. რადგანაც $\lim_{x\to 2} f(x)=5=f(2)$. ამიტომ მოცემული ფუნქცია უწყვეტია $x=2$ წერტილში.

ნახაზი 1



თუ ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით (იხ. ნახაზი 2) მაშინ მოცემული ფუნქცია არ არის უწყვეტი $x=2$ წერტილში. მართლაც,
$\lim_{x\to 2} f(x)=5\neq f(2)=7$.

ნახაზი 2



ნახაზი 3

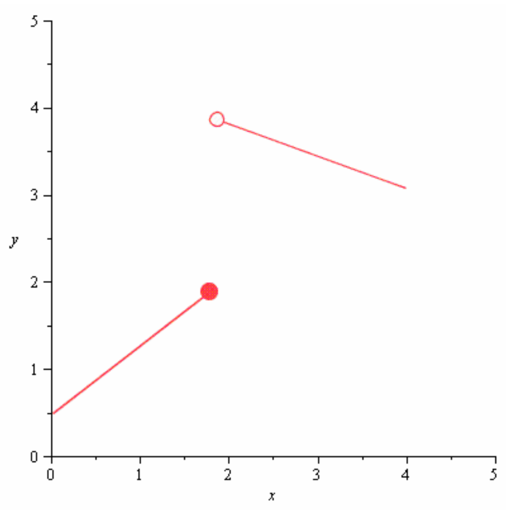
განვიხილოთ ფუნქცია (ნახ. 3). ამ შემთხვევაში ფუნქციას ზღვარი არა აქვს $x=2$ წერტილში და მაშასადამე ფუნქცია არ არის უწყვეტი (წყვეტილია) მოცემულ წერტილში.

ვიტყვით, რომ f ფუნქცია არის მარჯვნიდან უწყვეტი $x=c$ წერტილში თუ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი მოცემულ წერტილში უდრის f ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერტილში. ე. ი.

$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c).$$

მაგალითად ნახაზი 3-ით მოცემული ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან $x=2$ წერტილში. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია არის მარცხნიდან უწყვეტი $x=c$ წერტილში თუ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი მოცემულ წერტილში უდრის f ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერილში. ე. ი.

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c).$$



ნახაზზე მოცემული ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან $x=2$ წერტილში.

ნახაზი 4

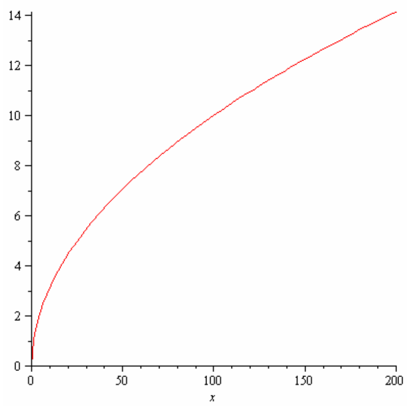
ადვილი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 1. იმისათვის რომ f ფუნქცია იყოს უწყვეტი $x=c$ წერტილში აუცილებელი და საკმარისია, რომ ის იყოს უწყვეტი როგორც მარჯვნიდან, ასევე მარცხნიდან.

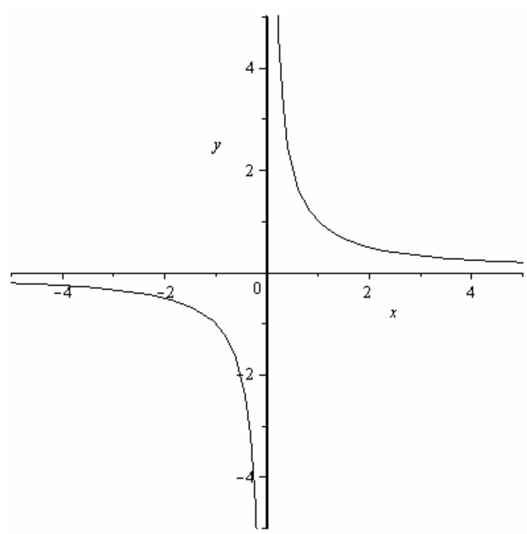
შენიშვნა 4. 1. თუ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ a და b წერტილებში უწყვეტობა ნიშნავს შესაბამისად მარჯვნიდან და მარცხნიდან უწყვეტობას.

უწყვეტობა ინტერვალზე. ფუნქციას ვუწოდოთ უწყვეტი რაიმე შუალედში, თუ იგი უწყვეტია ამ შუალედის ყოველ წერტილში. კერძოდ, ფუნქციას ვუწოდოთ უწყვეტი თუ ის უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

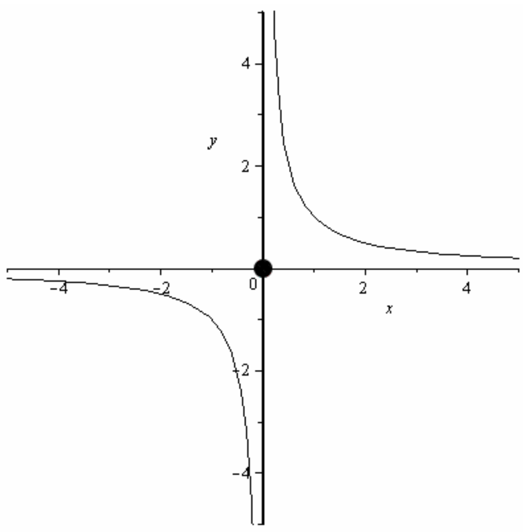
მაგალითი 4. 1. ფუნქცია $f(x)=\sqrt{x}$ უწყვეტია. მართლაც, ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[0,+\infty)$ შუალედი და $\forall c\in[0,+\infty),\quad \lim\limits_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$.



მაგალითი 4. 2. ფუნქცია $f(x)=\dfrac{1}{x}$ უწყვეტია (იხ. ნახ. 5). მართლაც, ამ ფუქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ და $\forall c\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\quad \lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{c}$. რაც შეეხება $x=0$ წერტილს, უწყვეტობის საკითხი ამ წერტილში არ განიხილება, ვინაიდან ეს წერტილი არ ეკუთვნის განსაზღვრის არეს.



ნახ. 5



ნახ. 6

თუ განვიხილავთ ფუნქციას (იხ. ნახ. 6):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$$

მაშინ ეს ფუნქცია განსაზღრულია მთელ ღერძზე და ის წყვეტილია $x=0$ წერტილში.

წყვეტის წერტილთა კლასიფიკაცია. როგორც ვნახეთ ნახ 2- და ნახ. 4-ზე f ფუნქციას გააჩნია როგორც მარჯვენა ასევე მარცხენა ზღვარი წერტილში და ეს ფუნქციები წყვეტილია. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ ფუნქციას აქვს პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. მოვიყვანოთ ზუსტი განმარტება.

განსაზღვრება 4. 2. თუ c წერტილი არის f ფუნქციის წყვეტის წერტილი და არსებობს მარჯვენა და მარცხენა სასრული ზღვრები მაშინ ვიტყვით, რომ c არის f ფუნქციის I გვარის წყვეტის წერტილი.

მაშასადამე ნახ. 2, ნახ. 3 და ნახ 4-ზე მოცემულ ფუნქციებს $c=2$ წერტილში გააჩნიათ I გვარის წყვეტა. შევნიშნოთ, რომ ნახ. 2-ში მოცემულ ფუნქციას $c=2$ წერტილში გააჩნია ზღვარი, ხოლო ნახ. 3 და ნახ. 4-ში მოცემულ ფუნქციებს კი-არა. ზემოთქმულიდან გამომდინარე პირველი გვარის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად

1) წერტილები რომლებშიც ფუნქციას გააჩნია ზღვარი მოცემულ წერტილში;

2) წერტილები რომლებშიც ფუნქციას არ გააჩნია ზღვარი მოცემულ წერტილში;

პირველ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ f ფუნქციას c წერტილში აქვს აცილებადი წყვეტა.

თუ ფუნქციას აქვს აცილებადი წყვეტა მოცემულ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის შეცვლით ფუნქცია შეიძლება გავხადოთ უწყვეტი. მართლაც, თუ ნახ. 2-ში $c=2$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობას გავხდით 5-ს 7-ის ნაცვლად (იხ. ნახ. 1) მაშინ ფუნქცია იქნება უწყვეტი ამ წერტილში. საზოგადოდ, თუ f ფუნქციას გააჩნია აცილებადი წყვეტა $x=c$ წერტილში და განვიხილავთ ახალ ფუნქციას

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & ,x\in D(f)\setminus\{c\}\\ L, & x=c\end{cases}$$

სადაც $L=\lim\limits_{x\to c}f(x)$. მაშინ F ფუნქცია იქნება უწყვეტი $x=c$ წერტილში.

c წყვეტის წერტილს f ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი ეწოდება, თუ იგი არ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. ე. ი. c წერტილს ეწოდება f ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, თუ c წერტილში ფუნქციას არ გააჩნია ერთი მაინც ცალმხრივი ზღვარი, ან

ცალმხრივი ზღვრებიდან ერთი მაინც უსასრულოდ დიდია. მაგალითად, ნახ. 6-ში მოცემულ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მეორე გვარის წყვეტა.

უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციები. f ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ ის უწყვეტია (a,b) ინტერვალის ყოველ წერტილში, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის წერტილებისა, რომლებშიც ის განიცდის პირველი გვარის წყვეტას და გარდა ამისა მას გააჩნია a და b წერტილებში ცალმხრივი (მარჯვენა და მარცხენა) ზღვრები. ნახ. 2-ში მოცემული ფუნქცია უწყვეტია ყველგან $[0,3]$-ზე გარდა $x=2$ წერტილისა და ამასთან ამ წერტილში ის განიცდის პირველი გვარის წყვეტას. ე. ი. უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა. ნახ. 3 და ნახ. 4-ში ასევე მოცემულია უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციების მაგალითები. რაც შეეხება ნახ. 6-ში მოცემული ფუნქცია არ არის უბან-უბან უწყვეტი არცერთ ინტერვლზე, რომელიც შეიცავს 0 წერტილს (რადგანაც ამ წერტილში ფუნქცია განიცდის მეორე გვარის წყვეტას).

უწყვეტი ფუნქციების თვისებები. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან და უწყვეტობის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ f და g ფუნქციები უწყვეტია $x=a$ წერტილში, მაშინ უწყვეტია მათი ჯამი $f+g$, რიცხვზე ნამრავლი αf, ნამრავლი fg და შეფარდება f/g თუ ამ უკანასკნელ შემთხვევაში $g(a)\neq 0$.

უწყვეტი ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას

თეორემა 4. 2. თუ f უწყვეტია $g(a)$ წერტილში და g უწყვეტია a წერტილში, მაშინ

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

ამ ფაქტის გამოყენებით ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x}$.

რადგან e^x უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ გვექნება

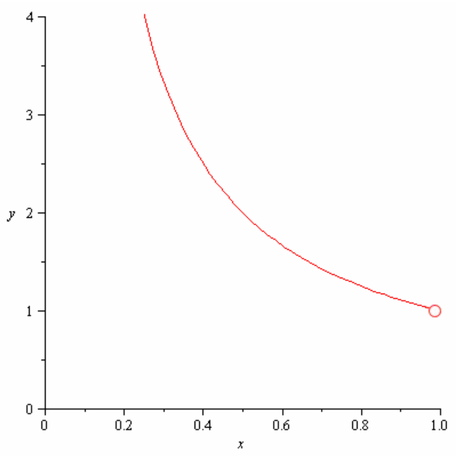
$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x} = e^0 = 1$$

თეორემა 4. 3. ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ არსებობს $x_1, x_2 \in [a,b]$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $x\in[a,b]$ გვაქვს

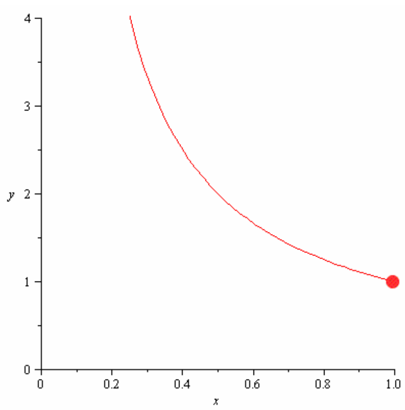
$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2).$$

მაშასადამე, x_1 არის f ფუნქციის გლობალური მინიმუმის წერტილი და x_2 არის f ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმის წერტილი.

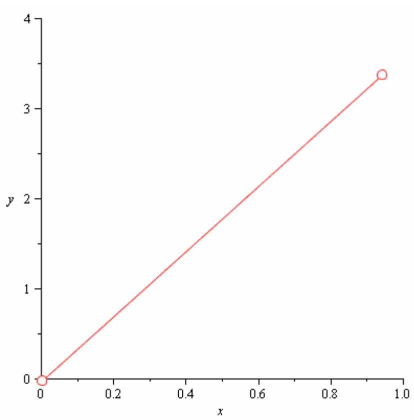
განვიხილოთ მაგალითები:



ნახაზზე მოცემულია (0,1) ინტერვალზე ზემოდან შემოუსაზღვრელი ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც გლობალური ექსტრემუმის წერტილები არა აქვს.

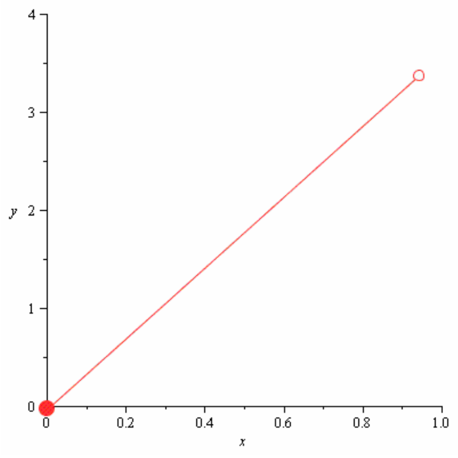


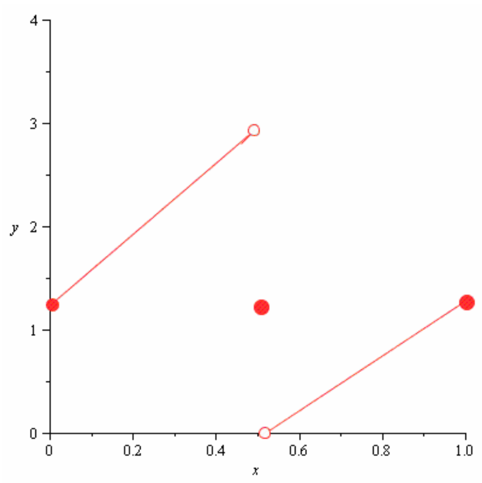
ნახაზზე მოცემულია (0,1] ინტერვალზე ზემოდან შემოუსაზღვრელი ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც გლობალური მინიმუმის წერტილი აქვს $x=1$ წერტილში, ხოლო გლობალური მაქსიმუმის წერტილი არა აქვს



ნახაზზე მოცემულია (0,1) ინტერვალზე შემოსაზღვრელი ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც გლობალური ექსტრემუმის წერტილები არა აქვს

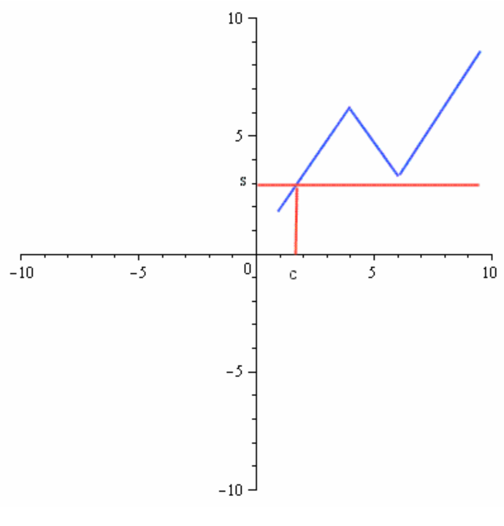
ნახაზზე მოცემულია [0,1) ინტერვალზე შემოსაზღვრელი ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც გლობალური მინიმუმის წერტილი აქვს $x=0$ წერტილში, ხოლო გლობალური მაქსიმუმის წერტილი არა აქვს.





ნახაზზე მოცემულია [0,1] სეგმენტზე შემოსაზღვრელი ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც წყვეტას განიცდის შიგა $x=0.5$ წერტილში და გლობალური ექსტრემუმის წერტილები არა აქვს.

თეორემა 4. 4. ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციაა და s რაიმე რიცხვია, რომლისთვისაც გვაქვს $f(a)\le s\le f(b)$, მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც c წერტილი ისეთი, რომ $a\le c\le b$ და $f(c)=s$.



მაგალითი 4. 3. ვაჩვენოთ, რომ $2^x=4x$ განტოლებას აქვს ფესვი $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ შუალედში.

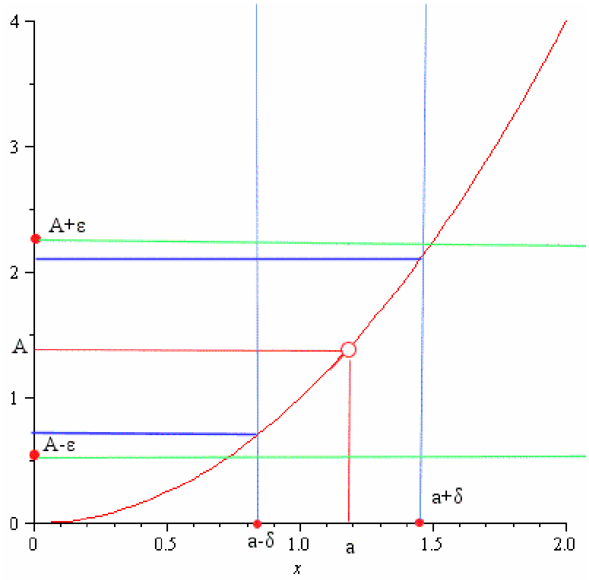
განვიხილოთ ფუნქცია

$f(x)=2^x-4x$. ამ ფუნქციისთვის გვაქვს: $f(0)=1>0$ და $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0.$

ავიღოთ $s=0$ რიცხვი. ცხადია, რომ $f(\frac{1}{2})\le s\le f(0)$. ამიტომ თეორემის ძალით არსებობს ისეთი c, $0<c<\frac{1}{2}$, რომ $f(c)=0$ ანუ $2^c-4c=0$. ე.ი. $2^x=4x$ განტოლებას $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ შუალედში აქვს ამონახსნი.

ფუნქციის ზღვრის მკაცრი განმარტება

განსაზღვრება 4. 2. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა. ვიტყვით, რომ A რიცხვი წარმოადგენს f ფუნქციის ზღვარს a წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $0<|x-a|<\delta$, გვექნება $|f(x)-A|<\varepsilon$.



მაგალითი 4. 4. ფუნქციის ზღვრის განმარტებით დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to 2}(10x-6)=14$$

ფუნქციის ზღვრის განმარტების ძალით ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის უნდა მოვძებნოთ ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა

$0<|x-2|<\delta$, მაშინ $|(10x-6)-14|<\varepsilon$.

$|(10x-6)-14|<\varepsilon$ უტოლობიდან ვღებულობთ:

$$|10x-20|<\varepsilon$$

$$10|x-2|<\varepsilon,$$

საიდანაც

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{10}$$

ამგვარად, თუ ავიღებთ $\delta=\frac{\varepsilon}{10}$, მაშინ გვექნება

$$\left|(10x-6)-14\right|<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0<\left|x-2\right|<\frac{\varepsilon}{10}$$

ამით დავამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 2}(10x-6)=14$.

ცალმხრივი ზღვრები

განსაზღვრება 4. 3. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის მარჯვენა (მარცხენა) მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა. ვიტყვით, რომ A რიცხვი წარმოადგენს f ფუნქციის მარჯვენა ზღვარს (მარცხენა ზღვარს) a წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $a<x<\delta+a$, $(a-\delta<x<a)$ გვექნება $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

მაგალითი 4. 5. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$. მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon>0$-თვის ავირჩიოთ $\delta=\varepsilon^2$. მაშინ როცა $0<|x-a|<\delta=\varepsilon^2$ $|\sqrt{x}-0|=\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$.

ზღვარი უსასრულობაში.

ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;+\infty)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to+\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=p$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს რიცხვი M, ისეთი, რომ $\left|f(x)-p\right|<\varepsilon$, როცა $x>M$.

მაგალითი 4. 6. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon>0$-თვის თუ შევარჩევთ $M=\frac{1}{\varepsilon}$, მივიღებთ $\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\varepsilon$, როცა $x>M$.

ანალოგიურად განიმარტება, რომ $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$.

უსასრულო ზღვრები.

ვიტყვით, რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, თუ ნებისმიერი დადებითი M რიცხვისათვის არსებობს დადებითი რიცხვი δ (M-ზე დამოკიდებული) ისეთი, რომ $f(x) > M$, როცა $0 < |x-a| < \delta$.

მაგალითი 4. 7. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$. მართლაც, ნებისმიერი $M > 0$-თვის თუ შევარჩევთ $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. მაშინ გვაქვს $\frac{1}{x^2} > M$, როცა $0 < |x| < \delta$.

მაგალითი 4. 8. ზღვრის განმარტების საფუძველზე დავამტკიცოთ, რომ თუ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, მაშინ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M$. მართლაც, რადგანაც არსებობს $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, ამიტომ ზღვრის განმარტების ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის არსებობს δ_1 ისეთი, რომ $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$, როცა $0 < |x-a| < \delta_1$. ანალოგიურად, დამტკიცდება, რომ არსებობს δ_2 ისეთი, რომ $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$, როცა $0 < |x-a| < \delta_2$. ვთქვათ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. მაშინ მივიღებთ

$$|(f(x)+g(x))-(L+M)| \le |f(x)-L| + |g(x)-M| < \varepsilon$$

როცა $0 < |x-a| < \delta$.

პროგრამა **MAPLE**-ის გამოყენებით გამოვთვალოთ ფუნქციის ზღვრები

```
> Limit((1-4*x^2)/(1-2*x), x=1/2)=limit((1-4*x^2)/(1-2*x), x=1/2);
```

$$\lim_{x\to(1/2)} \frac{1-4x^2}{1-2x} = 2$$

```
> Limit((x^2+2*x)/(2+x), x=-2)=limit((x^2+2*x)/(2+x), x=-2);
```

$$\lim_{x\to(-2)} \frac{x^2+2x}{2+x} = -2$$

```
> Limit(1/(x+1), x=-1,left)=limit(1/(x+1), x=-1,left);
```

$$\lim_{x\to(-1)-} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

```
> Limit(1/(x+1), x=-1,right)=limit(1/(x+1), x=-1,right);
```

$$\lim_{x \to (-1)+} \frac{1}{x+1} = \infty$$

```
> Limit((1-x^2)/(3*x^2-x-1), x=infinity)=limit((1-x^2)/(3*x^2-x-1), x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1-x^2}{3\,x^2 - x - 1} = \frac{-1}{3}$$

სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ ზღვრები:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 2x + 5)$

2. $\lim\limits_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 1)$

4. $\lim\limits_{x\to \pi}(\sin 2x + 2\cos 5x + x)$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 3x}{x^3 + 5x^2 + 1}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}(\log_2 x + e^{2x})$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$

8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$

13. $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$

2. გამოთვალეთ:

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, თუ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, თუ $f(x) = \begin{cases} \sin 5x, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, თუ $f(x) = (x^2 - 1)\cos\dfrac{5}{x}$

4. $\lim_{x\to 0} f(x)$, თუ $x^4 \sin^2 \frac{1}{x} \le f(x) \le x^4$

3. გამოთვალეთ ზღვრები:

1. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)$
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x-1}$
3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x-1}$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-1}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{|x|}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x-5}{|x|}$

4. გამოთვალეთ შემდეგი ცალმხრივი ზღვრები:

1. $\lim_{x\to 3+}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}}$
2. $\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+1}{x-2}$
3. $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}}$
4. $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}}$

5. გამოთვალეთ ცალმხრივი ზღვრები:

1. $\lim_{x\to 2+} f(x)$ და $\lim_{x\to 2-} f(x)$, თუ $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 2 \\ \frac{x^2-2x}{x-2}, & x>2 \end{cases}$

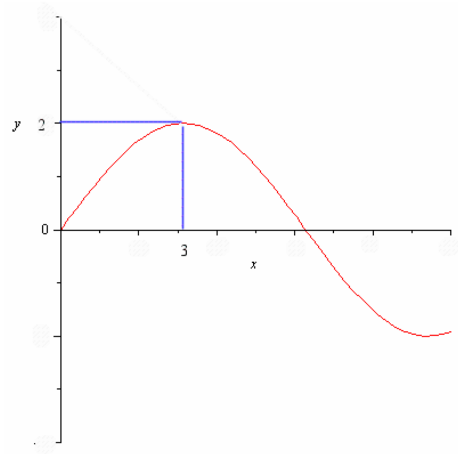
2. $\lim_{x\to 4+} f(x)$ და $\lim_{x\to 4-} f(x)$, თუ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+2, & x<4 \\ 2, & x=4 \\ \frac{x^2-16}{x-4}, & x>4 \end{cases}$

3. $\lim_{x\to 0+} f(x)$ და $\lim_{x\to 0-} f(x)$, თუ $f(x)=\begin{cases} 5, & x\le 0 \\ -2, & x>0 \end{cases}$

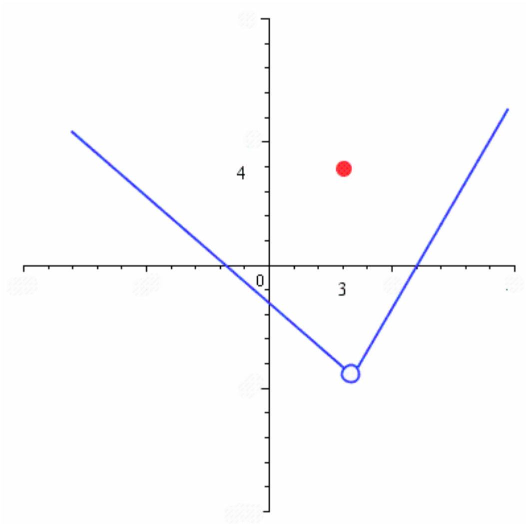
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x)$ და $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x)$, თუ $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & x\le \frac{\pi}{2} \\ x-\frac{\pi}{2}, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

6. იპოვეთ ფუნქციის ზღვარი მოცემულ წერტილში, თუ ფუნქცია მოცემულია გრაფიკული სახით:

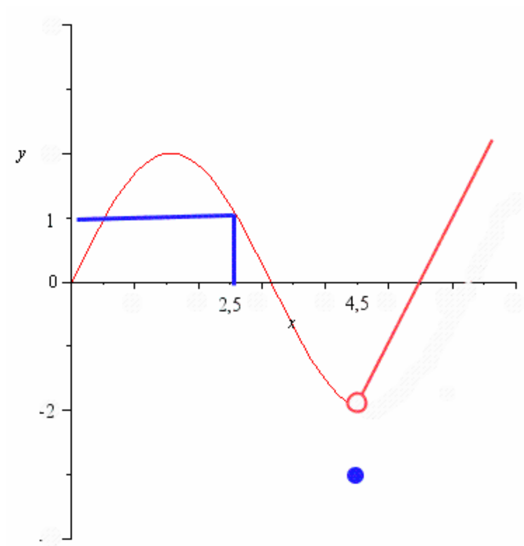
1) $\lim_{x \to 3} f(x)$, თუ



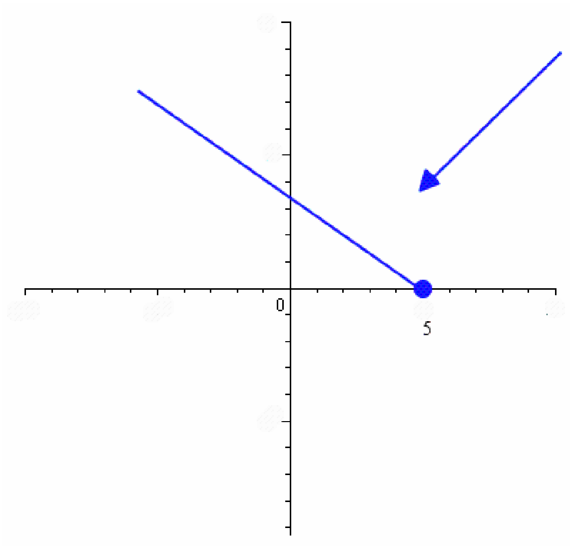
2) $\lim_{x \to 3} f(x)$, თუ



3) $\lim_{x \to 2,5} f(x)$, $\lim_{x \to 4,5} f(x)$, თუ



4) $\lim\limits_{x\to 5+} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to 5-} f(x)$, თუ



5) $\lim\limits_{x\to -8+} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to -8-} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to -5-} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to -5+} f(x)$,

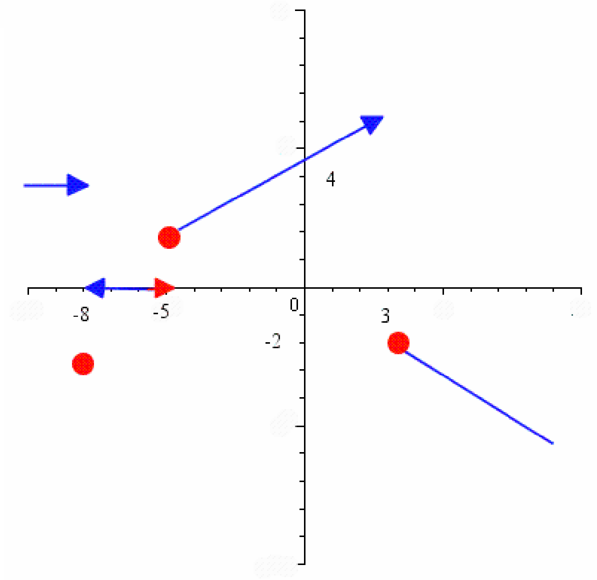
$\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$

$f(-8)$,

$f(-5)$

$f(3)$.



7. არის თუ არა უწყვეტი შემდეგი ფუნქციები (თუ წყვეტილია რომელიმე წერტილში, მაშინ რომელი გვარის წყვეტას აქვს ადგილი):

1. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$, თუ $D(f)=\{x: x\geq 2\}$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \sin x+1, & x>0 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 2x, x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, x>0 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2, x<0 \\ 3, x\geq 0 \end{cases}$

5. $f(x) = |x|$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

8. a-ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება f ფუნქცია უწყვეტი, თუ

1. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + x, & x \ge 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 2ax, & 0 \le x \le 1 \\ 3 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 2a, & x = 0 \\ \sin x + 1, & x > 0 \end{cases}$

9. ფუნქციის ზღვრის განმარტებით დაამტკიცეთ, რომ:

1. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 1) = -1$

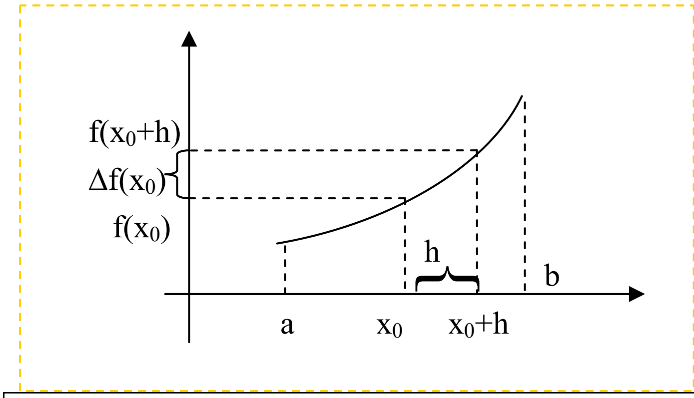
2. $\lim\limits_{x \to 2+} \sqrt{x - 2} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$

4. $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{1}{x \;\; -1} = +\infty$

5. ფუნქციის წარმოებული

წარმოებულის ცნება. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. დავაფიქსიროთ ნებისმიერი x_0 წერტილი $(a;b)$ ინტერვალიდან. h იყოს ისეთი ნამდვილი რიცხვი, რომლისთვისაც $x_0+h\in(a,b)$. f ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში ვუწოდოთ $\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$ სიდიდეს.



მაგალითი 5. 1. ვთქვათ, $f(x)=3x^2-2x$. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი $x_0=1$ წერტილში.

$\Delta f(1)=f(1+h)-f(1)=3(1+h)^2-2(1+h)-3+2=3h^2+4h$.

მაგალითი 5. 2. ვიპოვოთ $f(x)=x^3$ ფუნქციის ნაზრდი, როცა $x=1$ და $h=0,1$.

$x+h=1,1$. $f(1)=1$, $f(1,1)=(1,1)^3=1,331$.

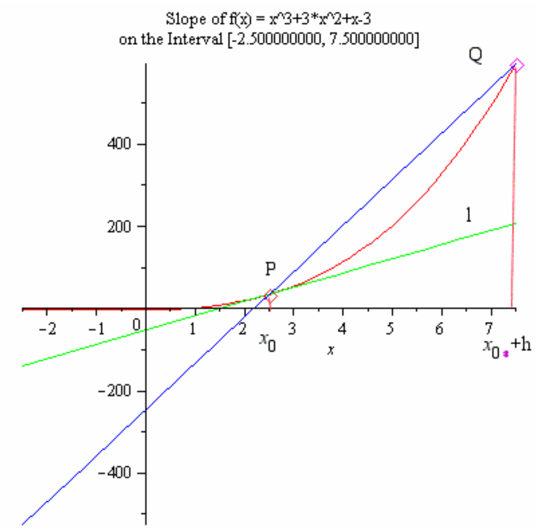
$\Delta f(1)=f(1,1)-f(1)=1,331-1=0,331$.

შენიშვნა 5. 1. ადვილი დასანახია, რომ შეფარდება

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

არის $P=(x_0,f(x_0))$ და $Q=(x_0+h,f(x_0+h))$ წერტილებზე გამავალი წრფის მიერ ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის ტანგესი, ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $(x_0,f(x_0))$ და $(x_0+h,f(x_0+h))$ წერტილებზე გამავალი წრფის საკუთხო კოეფიციენტია. მაშასადამე, ამ წერტილებზე გამავალ წრფის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$y=f(x_0)+m(x-x_0),$$



სადაც

ნახ. 1

$$m=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

განსაზღვრება 5. 1. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. f ფუნქციის წარმოებული $x_0\in(a;b)$ წერტილში ეწოდება

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

ზღვარს. თუ ზღვრის მნიშვნელობა სასრული რიცხვია, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება წარმოებადი. ამრიგად, f ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში აღინიშნება $f'(x_0)$ სიმბოლოთი და მოიცემა ტოლობით :

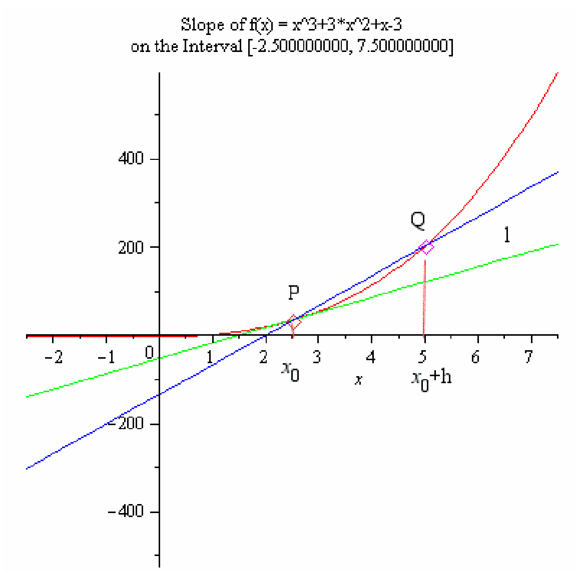
$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}. \qquad (1)$$

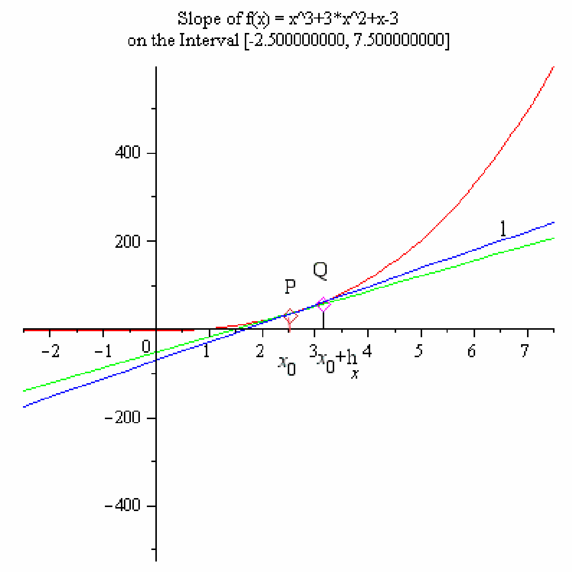
მაგალითი 5. 3. განმარტების საფუძველზე ვიპოვოთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის წარმოებული.

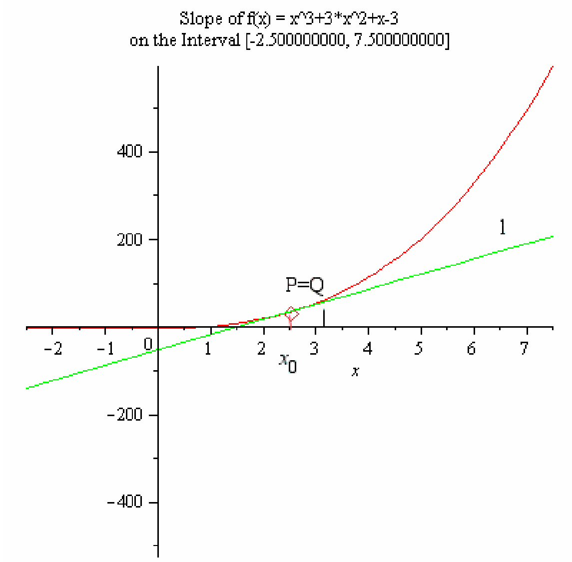
ამოხსნა: რადგანაც $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2$, მივიღებთ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=2x+\lim_{h\to 0}h=2x.$$

ადვილი დასანახია (იხ. ნახ. 1), როცა $h\to 0$, მაშინ Q წერტილი მოცემული წირის გასწვრივ მიისწრაფის P წერტილისკენ და შესაბამისად P და Q წერტილებზე გამავალი წრფე იცვლის თავის მდებარეობას (იხ. ნახ. 2), რომელიც მიისწრაფის l წრფისკენ.







ვთქვათ f ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში. წრფეს, რომელიც გადის f ფუნქციის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე და რომლის საკუთხო კოეფიციენტი არის $f'(x_0)$ უწოდებენ f ფუნქციის გრაფიკის მხებს $(x_0, f(x_0))$ წერტილში. მაშასადამე მხების განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

მაგალითი 5. 4. ვიპოვოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის მხების განტოლება $x_0 = 1$ წერტილში.

ამოხსნა: რადგანაც $f'(1) = 2$, $f(1) = 1$, ამიტომ მხების განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $f(x) - 1 = 2(x-1)$, $f(x) = 2x - 1$.

თუ ფუნქცია წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალის ყოველ x წერტილში, მაშინ მივიღებთ წარმოებულ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრული იქნება $(a;b)$ ინტერვალზე და ყოველ $x\in(a;b)$ წერტილში განიმარტება (1) ტოლობით.

მაგალითი 5. 5. $f(x)=x^2$ ფუნქციის გაწარმოების შედეგად მიღებული ფუნქცია არის $2x$.

f ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში განიმარტება შემდეგნაირადაც:

განსაზღვრება 5. 2. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია წარმოებადია $x_0\in(a;b)$ წერტილში, თუ არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. x_0 წერტილში ფუნქციის წარმოებულს აღვნიშნავთ $f'(x_0)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}. \tag{2}$$

ცხადია, რომ წარმოებულის ზემოთ მოყვანილი ორი განსაზღვრება ტოლფასია. მართლაც, თუ $x-x_0$ სიდიდეს აღვნიშნავთ h სიმბოლოთი, მაშინ $x=x_0+h$ და მივიღებთ, რომ (1) და (2) ტოლობები ეკვივალენტურია.

მაგალითი 5. 6. ვთქვათ $f(x)=|x|$. მაშინ f ფუნქცია არ არის წარმოებადი $x=0$ წერტილში და როცა $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{x}{|x|}=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$. მართლაც, მოდულის განმარტების ძალით

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

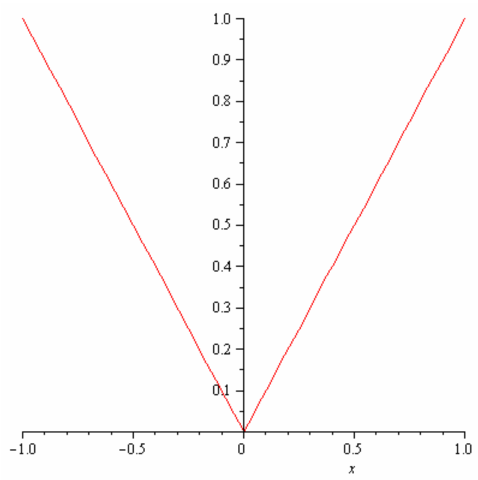
ვთქვათ $x\neq 0$. მაშინ , როცა $x>0$, $f(x)=x$ და $f'(x)=1$, ხოლო , როცა $x<0$, $f'(x)=-1$ და მაშასადამე

$$f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

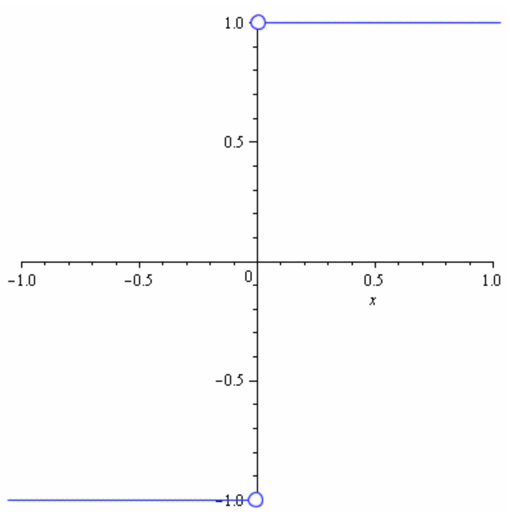
დავამტკიცოთ, რომ მოცემული ფუნქცია წარმოებადი არ არის $x=0$ წერტილში.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

და ეს ზღვარი არ ასებობს.

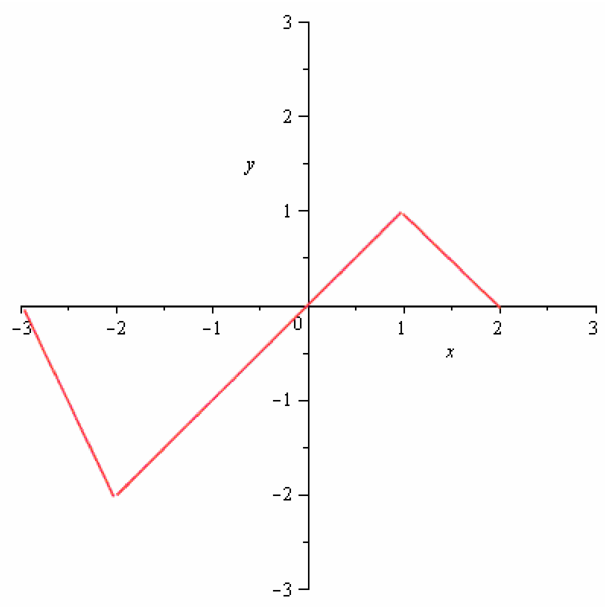


$f(x) = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი

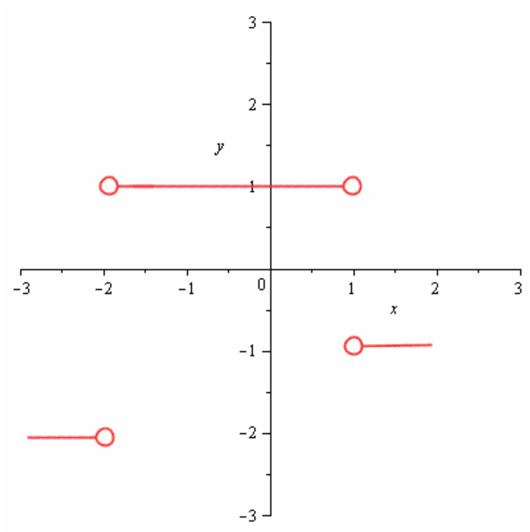


$f'(x)$ ფუნქციის გრაფიკი

ვთქვათ მოცემულია f ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 3)



ნახ. 3

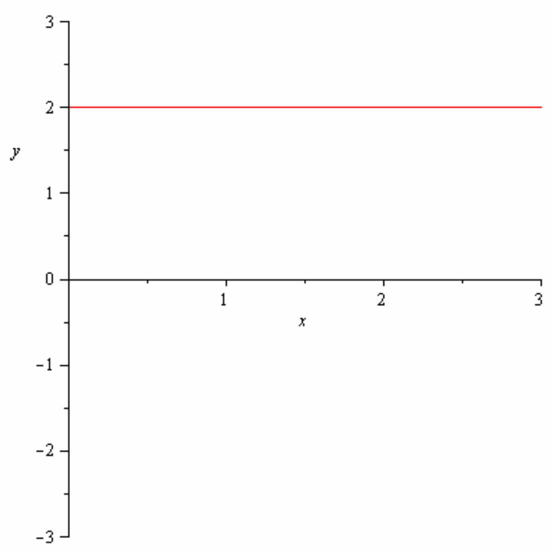


გაწარმოების შედეგად მიღებული ფუნქციის გრაფიკი. $x=-2, x=1$ წერტილებში ფუნქციას წარმოებული არა აქვს.

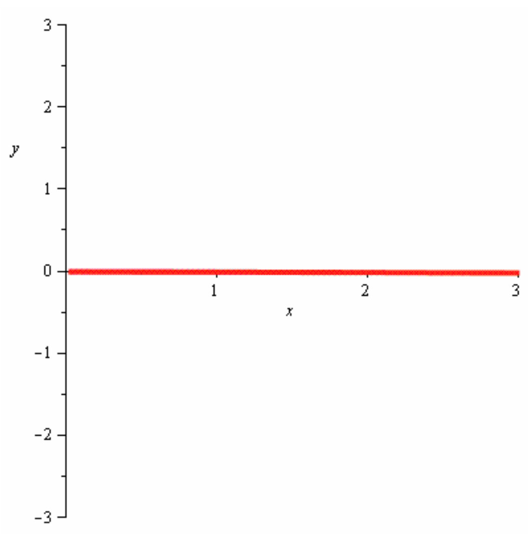
მაგალითი 5. 7. ვთქვათ $f(x)=c\,, x\in[a,b]$. მაშინ $f\,'(x)=0, x\in[a,b]$. მართლაც, წარმოებულის განმარტების ძალით

$$f\,'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\,.$$

გეომეტრიულად ამ ფაქტს შემდეგი ინტერპრეტაცია აქვს:

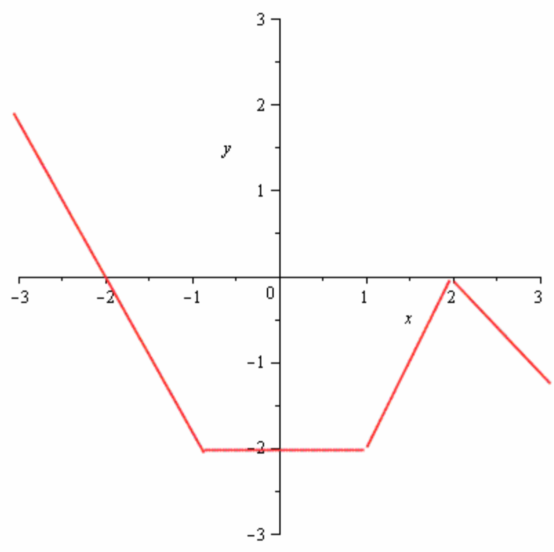


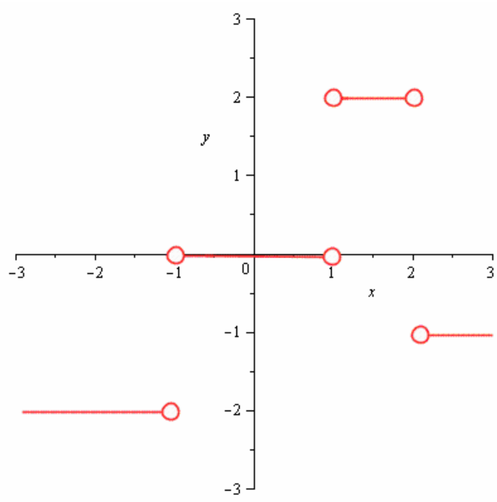
მუდმივი ფუნქციის გრაფიკი.



გაწარმოების შედეგად მიღებული ფუნქციის გრაფიკი.

მაგალითი 5. 8. მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი





მოცემული ფუნქციის გაწარმოების შედეგად მიღებული ფუნქციის გრაფიკი

მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები. თუ (2) ტოლობაში განვიხილავთ მარჯვენა ან მარცხენა ზღვრებს, მაშინ შესაბამისად მივიღებთ წერტილში ფუნქციის მარჯვენა ან მარცხენა წარმოებულის ცნებას.

განსაზღვრება 5. 3. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. f ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული $x_0\in(a;b)$ წერტილში აღინიშნება $f'(x_0+0)$ სიმბოლოთი და ეწოდება ზღვარს

$$\boxed{f'(x_0+)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს და სასრული რიცხვია, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება წარმოებადი მარჯვნიდან. ანალოგიურად, f ფუნქციის მარცხენა წარმოებული $x_0\in(a;b)$ წერტილში აღინიშნება $f'(x_0-0)$ სიმბოლოთი და ეწოდება ზღვარს

$$\boxed{f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს და სასრული რიცხვია, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება წარმოებადი მარცხნიდან.

თეორემა 5. 1. იმისათვის, რომ ფუნქცია წარმოებადი იყოს x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდნენ $f'(x_0+)$ და $f'(x_0-)$ სასრული რიცხვები და

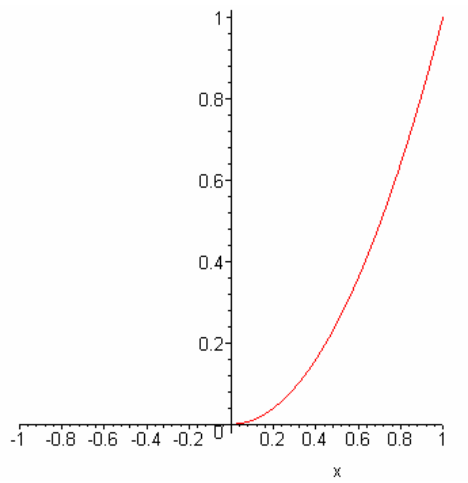
$$f'(x_0+) = f'(x_0-). \tag{3}$$

ამასთან (3) ტოლობის შემთხვევაში მათი საერთო მნიშვნელობა ემთხვევა f ფუნქციის წარმოებულს x_0 წერტილში, ე. ი.

$$f'(x_0+) = f'(x_0-) = f'(x_0).$$

მაგალითი 5. 9. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ x^2, x\ge 0 \end{cases}$$



გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები 0 წერტილში. განმარტების ძალით

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{0-0}{x} = 0.$$

ანალოგიურად,

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2-0}{x} = \lim_{x\to 0-} x = 0.$$

რადგანაც

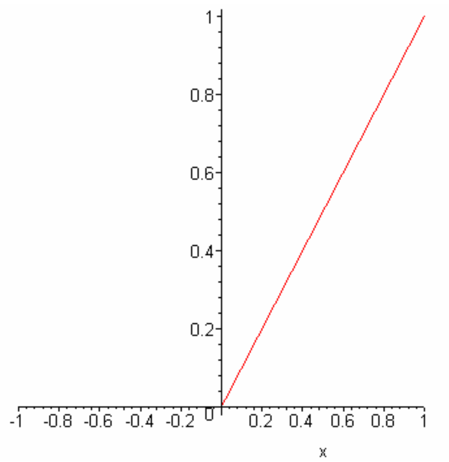
$$f'(0-) = f'(0+) = 0$$

ამიტომ, თეორემა 5. 1-ის ძალით

$$f'(0) = 0.$$

მაგალითი 5. 10. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ x\ , x\ge 0 \end{cases}.$$



ადვილი დასანახია, რომ

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{0-0}{x} = 0$$

და

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x\ -0}{x} = \lim_{x\to 0-} 1 = 1.$$

რადგანაც

$$f'(0-) \neq f'(0+)$$

ამიტომ, თეორემა 5. 1-ის ძალით f ფუნქცია არ არის წარმოებადი 0 წერტილში.

მაგალითი 5. 11. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = |x|$.

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|-0}{x} = -1$$

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x\ -0}{x} = \lim_{x\to 0-} 1 = 1.$$

რადგანაც

$$f'(0-) \neq f'(0+)$$

ამიტომ, თეორემა 5. 1-ის ძალით f ფუნქცია არ არის წარმოებადი 0 წერტილში.

მაგალითი 5. 12. ვთქვათ, $f(x) = x^{1/3}$ და გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წაროებული 0 წერტილში.

$$f'(0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$f'(0-) = +\infty .$$

ე. ი.

$$f'(0) = +\infty .$$

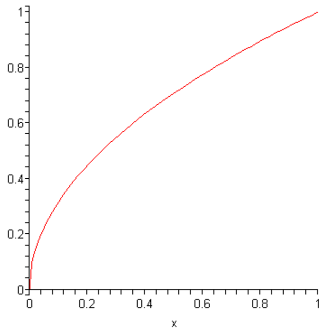
მაგალითი 5. 13. ვთქვათ, $f(x) = x^{2/3}$. მაშინ

$$f'(0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^{1/3}} = +\infty ,$$

$$f'(0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty.$$

შენიშვნა 5. 2. იმ შემთხვევაში, როცა $f'(x_0+0) = \infty$ ან $f'(x_0-0) = \infty$, მაშინ x_0 წერტილზე გავლებული f ფუნქციის მხები oy ღერძის პარალელურია.

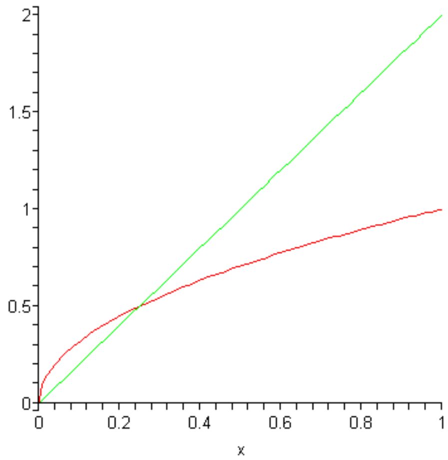
მაგალითი 5. 14. ვთქვათ $f(x)=x^{1/2}, \qquad x\in[0,1]$.

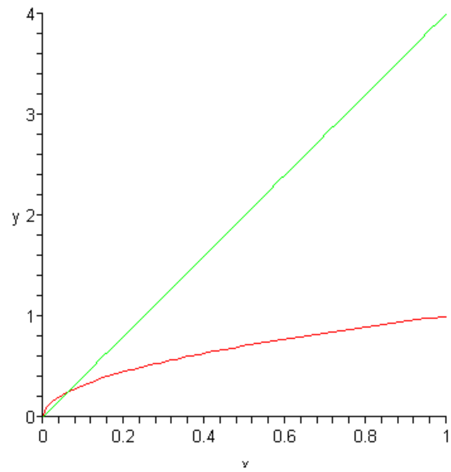


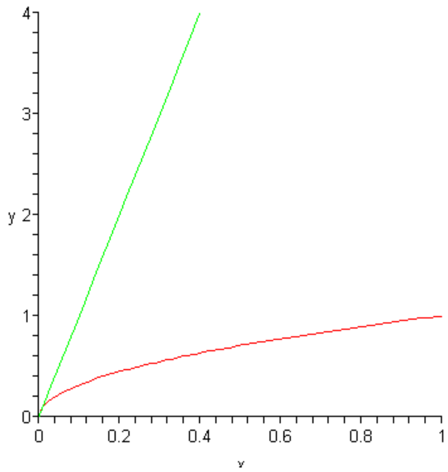
გამოვთვალოთ f ფუნქციის წარმოებული 0 წერტილში.

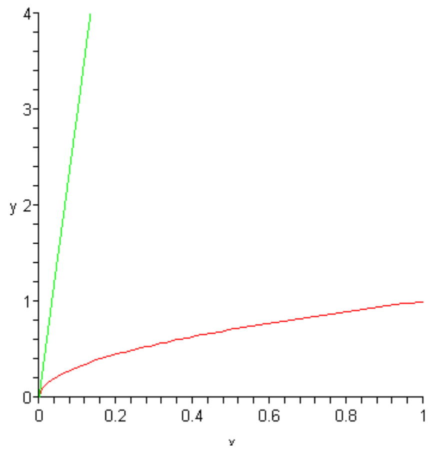
$$f'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h+0)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^{1/2}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h^{1/2}}=+\infty .$$

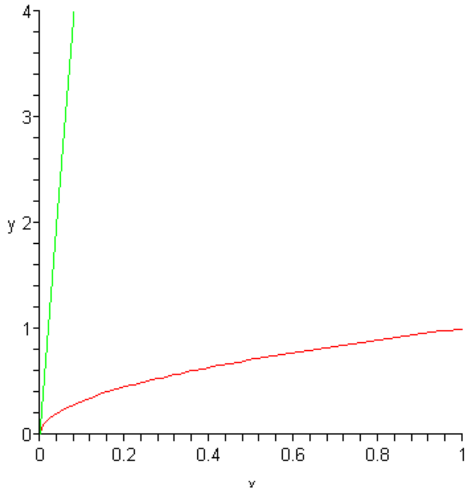
განვიხილოთ 0 წერტილზე გამავალი მოცემული ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებული რამოდენიმე მკვეთი, რომლებიც მიისწრაფიან oy ღერძისკენ.

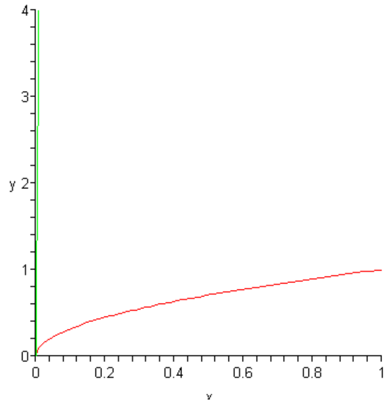










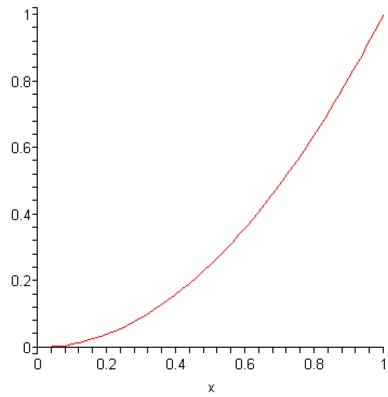


შენიშვნა 5. 3. ვთქვათ, ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია წარმოებადია a წერტილში, თუ არსებობს სასრული მარჯვენა წარმოებული $f'(a+)$ და შესაბამისად ვიტყვით, რომ რომ f ფუნქცია წარმოებადია b წერტილში, თუ არსებობს სასრული მარცხენა წარმოებული $f'(a-)$.

მაგალითი 5. 15. ვთქვათ $f(x)=x^2, x\in[0,1]$.

მაშინ

$$f'(0)=f'(0+)=0 \text{ და } f'(1)=f'(1-)=2.$$



კავშირი ფუნქციის წარმოებადობისა და უწყვეტობის ცნებებს შორის

შენიშვნა. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ფუნქციის წარმოებული წერტილში შეიძლება იყოს როგორც სასრული რიცხვი ასევე უსასრულობა. ქვემოთ ყველგან ფუნქციის წარმოებულის ქვეშ ვიგულისხმებთ მხოლოდ სასრულ წარმოებულს.

თეორემა 5. 2. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. თუ f ფუნქცია წარმოებადია $x_0\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ, f ფუნქცია წარმოებადია $x_0\in(a;b)$ წერტილში, ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

მაშინ

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0),$$

რაც გვაძლევს f ფუნქციის უწყვეტობას x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5. 4. დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ წერტილში ფუნქციის უწყვეტობა ამ წერტილში წარმოებადობისათვის არის აუცილებელი პირობა, მაგრამ საზოგადოდ, წერტილში უწყვეტობა ამ წერტილში წარმოებადობისათვის არ არის საკმარისი პირობა, რასაც ადასტურებს მაგალითი 5. 10 და 5. 11.

შედეგი. 5. 1 თუ ფუნქცია წყვეტილია წერტილში, მაშინ ის წარმოებადი არ არის ამ წერტილში.

ფუნქციათა წრფივი კომბინაციის, ნამრავლის და ფარდობის წარმოებული

თეორემა 5. 3. მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია (იხ. მაგალითი 5. 6)

თეორემა 5. 4. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ და $g:(a;b)\to R$ ფუნქციები. თუ f და g ფუნქციები წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში f და g ფუნქციების ჯამი და

$$\boxed{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)};$$

დამტკიცება. წარმოებულის განმარტების ძალით

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}
$$

თეორემა 5. 5. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ და $g:(a;b)\to R$ ფუნქციები. თუ f და g ფუნქციები წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში f და g ფუნქციების ნამრავლი და

$$\boxed{(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)};$$

დამტკიცება. წარმოებულის განმარტების ძალით გვაქვს

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
& f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).
\end{aligned}
$$

შედეგი 5. 2. თუ f და g ფუნქციები წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ ნებისმიერი $\alpha,\beta\in R$ რიცხვებისთვის წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში $\alpha f+\beta g$ წრფივი კომბინაცია და

$$\boxed{(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)}.$$

თეორემა 5. 6. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. თუ f და g ფუნქციები წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში და $g(x)\neq 0$, მაშინ წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში f და g ფუნქციების ფარდობა და

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}.$$

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ რადგან $g(x)$ წარმოებადია, ამიტომ ის უწყვეტია x წერტილში და რადგანაც $g(x)\neq 0$, წერტილში უწყვეტობის განმარტებიდან გამომდინარეობს x წერტილის ისეთი მიდამოს არსებობა, რომელშიაც $g(x)\neq 0$. h იყოს ისეთი მცირე რიცხვი, რომ $x+h$ ეკუთვნოდეს ზემოთაღნიშნულ მიდამოს, ე. ი. $g(x+h)\neq 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g^2(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g^2(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g^2(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებული

1) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha\in R.$

კერძოდ:

$(x)'=1$; $\quad (x^2)'=2x$; $\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad (\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$;

2) $(\sin x)'=\cos x$;

3) $(\cos x)' = -\sin x$;

4) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

მართლაც, $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

5) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; (დაამტკიცეთ!).

6) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$

კერძოდ,

$(e^x)' = e^x$;

7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$.

კერძოდ,

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

რთული ფუნქციის წარმოებული

თეორემა. 5. 7. ვთქვათ, $u = g(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, ხოლო $y = f(u)$ ფუნქცია წარმოებადია $u_0 = g(x_0)$ წერტილში, მაშინ რთული ფუნქცია $f\left(g(x)\right)$ წარმოებადია x_0 წერტილში და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$[f(g(x_0))]' = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

მაგალითი 5. 16. იპოვეთ $y = \sqrt{x^2+1}$ ფუნქციის წარმოებული.

$y = f(g(x))$, სადაც $f(u) = \sqrt{u}$ და $g(x) = x^2 + 1$. ვინაიდან $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ და $g'(x) = 2x$, თეორემა 5. 7-ის ძალით მივიღებთ

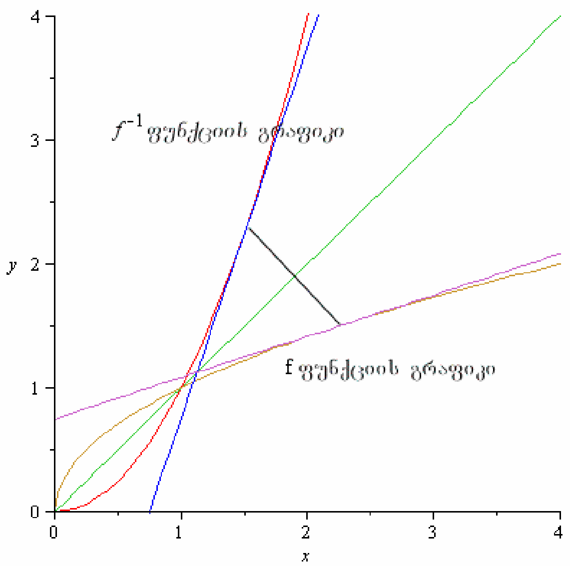
$$y'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

მაგალითი 5. 17. იპოვეთ $y=|x^2-1|$ ფუნქციის წარმოებული.

ვინაიდან $(|x|)'=\dfrac{x}{|x|}$ (იხ. მაგ. 5. 5) , თეორემა 5. 7-ის ძალით გვაქვს

$$y'(x)=\frac{2x(x^2-1)}{|x^2-1|}=\begin{cases}2x, & x<-1, x>1\\ -2x, & -1<x<1\end{cases}$$

შექცეული ფუნქციის წარმოებული



თეორემა 5. 8. ვთქვათ, $f:X\to Y$ და $f^{-1}:Y\to X$ ურთიერთშექცეული და უწყვეტი ფუნქციებია შესაბამისად $x_0\in X$ და $f(x_0)=y_0$ წერტილებში. თუ f ფუნქცია წარმოებადი ფუნქციაა x_0 წერტილში და $f'(x_0)\neq 0$, მაშინ f^{-1} ფუნქცია წარმოებადია y_0 წერტილში და

$$(f^{-1})(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (4)$$

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ, რადგანაც f ფუნქცია წარმოებადი ფუნქციაა x_0 წერტილში და $f'(x_0)\neq 0$, ამიტომ (x_0,y_0) წერტილში მოცემულ ფუნქციის გრაფიკს გააჩნია დახრილი მხები, მაშინ შესაბამისად დახრილი მხები აქვს f^{-1} ფუნქციის გრაფიკს (y_0,x_0) წერტილში ე. ი. , f^{-1} ფუნქცია წარმოებადია (y_0,x_0) წერტილში. დავამტკიცოთ (4) ფორმულა. შექცეული ფუნქციის განმარტებისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად ვწერთ

$$f(f^{-1}(y))=y\Rightarrow\left(f(f^{-1}(y))\right)'=1\Rightarrow f'(f^{-1}(y))(f^{-1}(y)'=1\Rightarrow(f^{-1}(y)'=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{f'(x)}.$$

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებული

1) დავამტკიცოთ, რომ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$.

მართლაც, რადგანაც $\sin : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$ და $\arcsin : [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ ფუნქციები ურთიერთშექცეული ფუნქციებია და $(\sin x)' = \cos x \neq 0$, როცა $|x| < \frac{\pi}{2}$, $y = \sin x$-თვის კი გვაქვს $|y| < 1$, ამიტომ

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი:

2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0,1)$;

3) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 4) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

მაღალი რიგის წარმოებულები. თუ $f : (a;b) \to R$ ფუნქცია წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაშინ არსებობს $(a;b)$ ინტერვალზე განსაზღვრული f' ფუნქცია, რომელიც არის f ფუნქციის წარმოებული. თუ f' ფუნქცია კვლავ წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაშინ განვიხილავთ $(f')' = f''$ ფუნქციას, ანუ f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს. თუ მიღებული f'' ფუნქცია კვლავ წარმოებადია, მაშინ ვიხილავთ მესამე რიგის წარმოებულს და ა. შ. ამრიგად, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$. (აქ $f^{(n)}$ ჩანაწერი აღნიშნავს f ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებულს.)

ფუნქციას უწოდებენ უსასრულოდ წარმოებადს $(a;b)$ ინტერვალზე, თუ მას $(a;b)$ ინტერვალზე გააჩნია ნებისმიერი რიგის წარმოებული.

მაგალითი 5. 18. 1) $f(x) = e^x$, ცხადია, რომ $f^{(n)}(x) = e^x$.

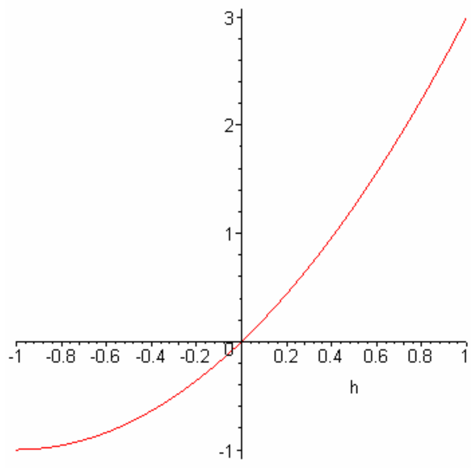
2) $f(x) = \sin x$, ცხადია, რომ $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}n)$ (შეამოწმეთ!)

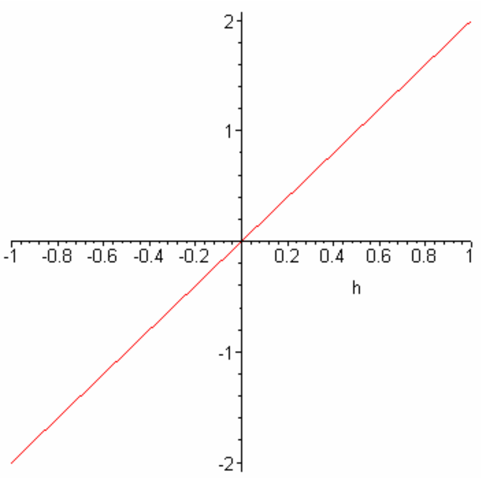
3) $f(x) = \cos x$, ცხადია, რომ $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}n)$ (შეამოწმეთ!)

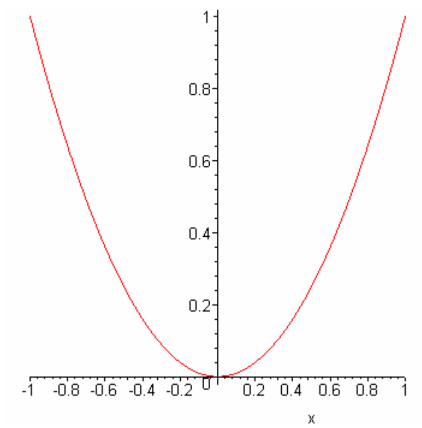
ფუნქციის დიფერენციალი. ვთქვათ $f(x) = x^2$. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის h ნაზრდი $x = 1$ წერტილში.

$$f(1+h) - f(1) = (1+h)^2 - 1 = 2h + h^2.$$

როგორც ვხედავთ, ნაზრდი როგორც h-ის ფუნქცია წარმოადგენს ორი ფუნქციის ჯამს, სადაც პირველი ფუნქცია არის წრფივი $2h$ ხოლო მეორე ფუნქცია კი h^2



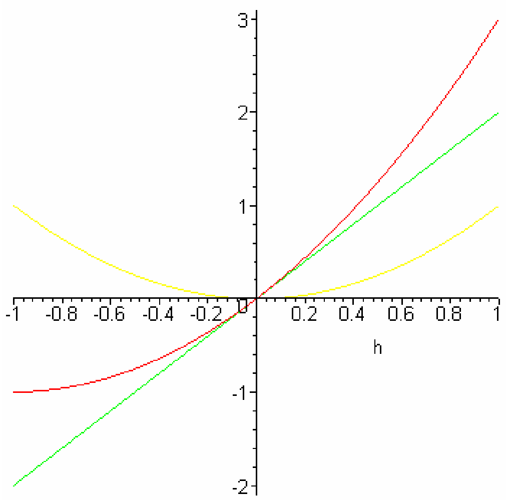




h^2

$2h$

ე. ი.



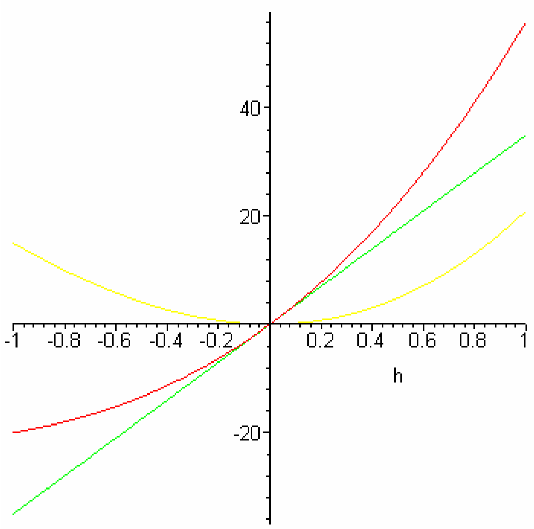
რაც შეეხება მეორე ფუნქციას, მას აქვს თვისება

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=0}.$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. ვთქვათ, $f(x)=3x^3-2x^2+x-3$. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის h ნაზრდი $x=2$ წერტილში, მივიღებთ

$$f(2+h)-f(2)=35\text{h}+18\text{h}^2+3\text{h}^3.$$

აქაც ფუნქციის ნაზრდი წარმოდგება ორი $35h$ და $18\text{h}^2+3\text{h}^3$ ფუნქციების ჯამად



ისე როგორც პირველ შემთხვევაში, აქაც $18\text{h}^2+3\text{h}^3$ ფუნქციას ის თვისება აქვს, რომ

$$\lim_{h\to 0}\frac{18\text{h}^2+3\text{h}^3}{h}=0.$$

დასკვნა. ორივე შემთხვევაში ფუნქციის ნაზრდი წარმოვადგინეთ ორი ფუნქციის ჯამის სახით (h-ის მიმართ), სადაც პირველი ფუნქცია არის წრფივი, ხოლო მეორეს ის თვისება აქვს, რომ h-ზე უფრო სწრაფად მიისწრაფის ნულისაკენ, ან სხვა სიტყვებით, მეორე ფუნქციის შეფარდება h-თან მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ.

ისმის კითხვა: ყოველთვის აქვს თუ არა ასეთ წარმოდგენას ადგილი ?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი

მაგალითი 5. 19. ვთქვათ $f(x)=|x|$. მაშინ ამ ფუქციის h ნაზრდს $x=0$ წერტილში ექნება შემდეგი სახე

$$f(h)-f(0)=|h|.$$

ვთქვათ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$|h|=Ah+\alpha(h),$$

სადაც

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$$

ე. ი. A არ არის ცალსახად განსაზღრული.

განსაზღვრება 5. 3. ვთქვათ f ფუნქცია x წერტილის მიდამოში არის განსაზღრული. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია არის დიფერენცირებადი x წერტილში, თუ არსებობს A რიცხვი (x-ზე დამოკიდებული), ისეთი რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$f(x+h)-f(x)=Ah+\alpha(x;h), \qquad (5)$$

სადაც

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(x;h)}{h}=0.$$

წარმოდგენა (5)-ში **წრფივ** ნაწილს უწოდებენ f ფუნქციის დიფერენციალს x წერტილში და აღნიშნავენ $df(x)$ სიმბოლოთი. ე. ი.

$$df(x)=Ah, \qquad (6)$$

სადაც A x-ზე დამოკიდებული რიცხვია.

კავშირს დიფერენციალსა და წარმოებულს შორის ამყარებს შემდეგი

თეორემა 5. 9 . ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. იმისათვის, რომ f ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი $x\in(a;b)$ წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მას ამ წერტილში ქონდეს სასრული წარმოებული.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, f ფუნქცია დიფერენცირებადია $x\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ ადგილი აქვს (1) ტოლობას. ვიგულისხმოთ, რომ

$h \neq 0$ და (1) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ h-ზე. მივიღებთ: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A + \frac{\alpha(x;h)}{h}$, ამიტომ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(A + \frac{\alpha(x;h)}{h}) = A$, ე.ი. f ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში.

საკმარისობა. ვთქვათ, f ფუნქცია წარმოებადია $x \in (a;b)$ წერტილში, მაშინ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. განვიხილოთ ფუნქცია $\alpha(x;h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$. მაშინ $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x;h)}{h} = f'(x) - f'(x) = 0$. ამიტომ ადგილი ექნება წარმოდგენას $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x;h)$, რაც ემთხვევა (1) ტოლობას, თუ ჩავთვლით, რომ $A = f'(x)$. ამრიგად, f ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ (5) წარმოდგენაში

$$\boxed{A = f'(x)}.$$

მაშასადამე (5) და (6) ტოლობები გადაიწერებიან შემდეგნაირად

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x;h). \tag{7}$$

და

$$df(x) = f'(x)h \tag{8}$$

თუ (8) ტოლობაში $f(x) = x$, მაშინ მივიღებთ

$$dx = h$$

ამიტომ ზოგჯერ (8)-ს ასე ჩაწერენ.

$$df(x) = f'(x)dx \quad . \tag{9}$$

dx-ს უწოდებენ არგუმენტის დიფერენციალს.

დაიმახსოვრეთ ფუნქციის წარმოებული წერტილში არის რიცხვი, ხოლო ფუნქციის დიფერენციალი წერტილში კი წრფივი ასახვა.

ფერმას თეორემა

თეორემა 5. 10 (ფერმა). ვთქვათ, $f:[a,b]\to R$ წარმოებადია $x_0\in(a,b)$ წერტილში და ამასთან, x_0 არის f ფუნქციის შიგა ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ $f'(x_0)=0$.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ x_0 არის f ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი. მაშინ საკმაოდ მცირე დადებითი h რიცხვისთვის გვექნება

$$f(x_0+h)-f(x_0)\le 0, \qquad f(x_0-h)-f(x_0)\le 0.$$

აქედან

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0\ , \qquad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\ge 0.$$

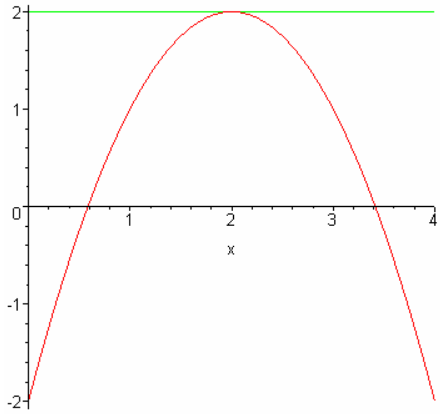
რადგან x_0 წერტილში არსებობს f ფუნქციის წარმოებული , ამიტომ მივიღებთ:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0,$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\ge 0,$$

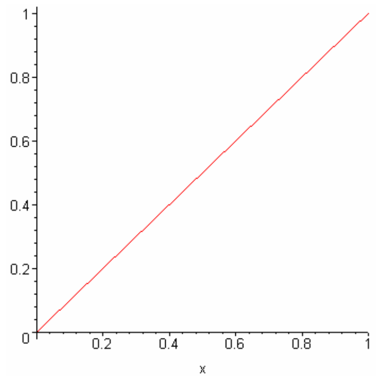
საიდანაც დავასკვნით, რომ $f'(x_0)=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

გეომეტრიულად ფერმას თეორემა ნიშნავს, რომ თუ x_0 არის f ფუნქციის შიგა ექსტრემუმის წერტილი და ამ წერტილში ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ ამ წერტილში გავლებული მხები ox ღერძის პარალელურია.



შენიშვნა. ფერმას თეორემაში მოთხოვნა იმ ფაქტისა, რომ x_0 იყოს შიგა ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი არსებითია. მართლაც თუ განვიხილავთ $f(x)=x$ ფუნქციას $[0,1]$ სეგმენტზე

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $x=0$ და $x=1$ წერტილები არიან მოცემული ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილები, მაგრამ ამ წერტილებში ფუნქციის წარმოებული 1-ის ტოლია.

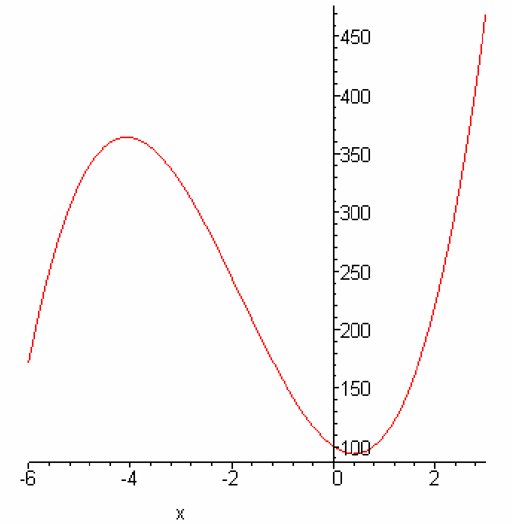


განსაზღვრება 5. 4. წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

განსაზღვრება 5. 5. წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, ამ ფუნქციის სტაციონალური წერტილი ეწოდება.

მაგალითი 5. 20. პროგრამა **MAPLE**-ის გამოყენებით ვიპოვოთ $f(x)=6x^3+33x^2-30x+100$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები.

```
> plot(6*x^3+33*x^2-30*x+100,x=-6..3);
```




```
> Diff(f(x),x)=diff(6*x^3+33*x^2-30*x+100,x);
```

$$\frac{d}{dx}\mathrm{f}(x)=18\,x^2+66\,x-30$$

```
> solve(18*x^2+66*x-30,x);
```

$$-\frac{11}{6}+\frac{\sqrt{181}}{6},\ -\frac{11}{6}-\frac{\sqrt{181}}{6}$$

მაგალითი 5. 21. ვიპოვოთ $g(t)=\sqrt[3]{t^2}\,(2t-1)$ ფუნქციის კრიტიკული წერილები.

```
> g:=t->t^(2/3)*(2*t-1);
```

$$g := t \to t^{(2/3)}\,(2\,t-1)$$

```
> diff(g(t),t);
```

$$\frac{2\,(2\,t-1)}{3\,t^{(1/3)}}+2\,t^{(2/3)}$$

```
> solve(%=0,t);
```

$$\frac{1}{5}$$

```
>
```

ვინაიდან $t=0$ წერტილში $g(t)$ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული, ამიტომ $t=0$ წერტილი კრიტიკული წერტილია. მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის კრიტიკული წერტილებია $t=0$ და $t=1/5$.

როლის თეორემა

თეორემა 5. 11 (როლის). თუ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული f ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) f უწყვეტი $[a,b]$-ზე;
2) f წარმოებადია (a,b)-ზე;
3) $f(a)=f(b)$

მაშინ (a,b) ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი x_0 წერტილი, რომ
$$f'(x_0)=0.$$

დამტკიცება. თუ f ფუნქცია მუდმივია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ (a,b) ინტერვალში $f'(x_0)=0$. ამრიგად, არსებობს x_0 წერტილი ((a,b) ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი), რომლისთვისაც $f'(x_0)=0$.
ახლა ვთქვათ, f ფუნქცია მუდმივი არაა $[a,b]$ სეგმენტზე. ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ მას აქვს ამ სეგმენტზე აბსოლუტური მინიმუმი და აბსოლუტური მაქსიმუმი. ვთქვათ , ესენია m და M. რადგანაც $m<M$ და $f(a)=f(b)$, ამიტომ f ფუნქცია მიიღებს ერთ-ერთ m ან M მნიშვნელობას (a,b) ინტერვალის რაიმე x_0 წერტილში. ფერმას თეორემის თანახმად $f'(x_0)=0$. ე.ი. როლის თეორემა დამტკიცებულია.

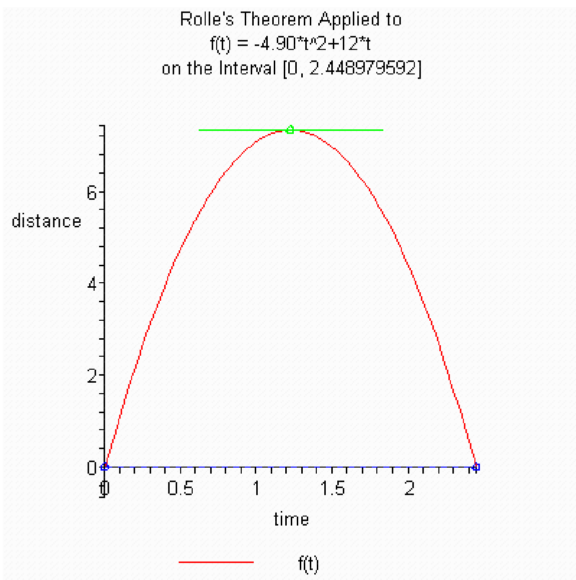
გეომეტრიულად როლის თეორემა ნიშნავს, რომ თუ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია (a,b) ინტერვალში და, ამასთანავე, $f(a)=f(b)$ მაშინ (a,b) ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც x_0 წერტილი, ისეთი რომ ამ წერილზე გავლებული მხები ox ღერძის პარალელურია.

```
> with(Student[Calculus1]):
position := -0.5*9.8*t^2 + 12*t;
```

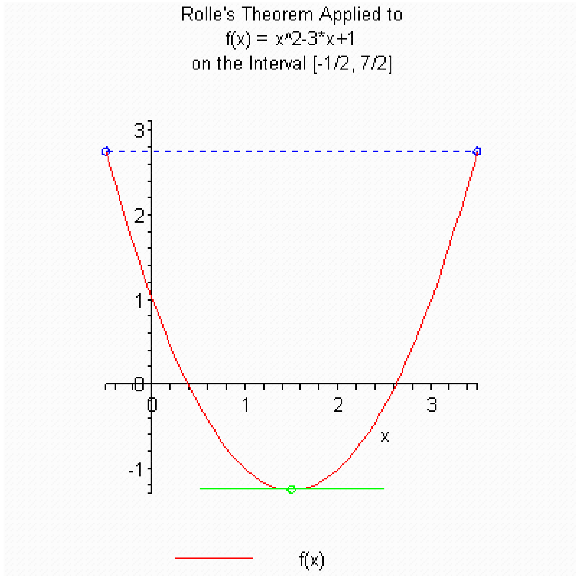
$$position := -4.90\, t^2 + 12\, t$$

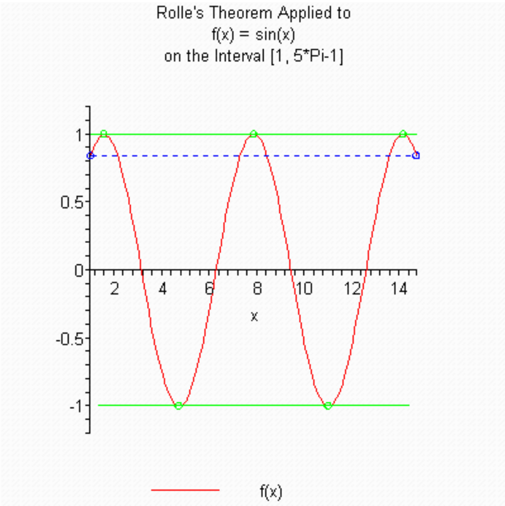
```
> RollesTheorem(position,
t=0..2.448979592, output =
points);
```

$$[1.224489796]$$

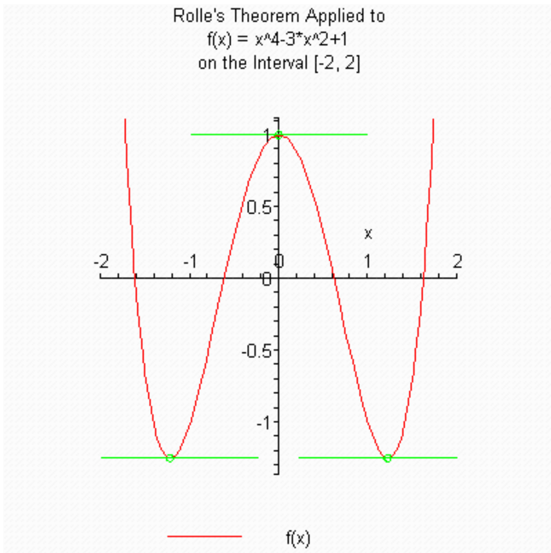


```
> RollesTheorem(position, t=0..2.448979592, labels=["time", "distance"]);

> RollesTheorem(x^2 - 3*x + 1, -1/2..7/2);

> RollesTheorem(sin(x), 1..5*Pi-1);
```



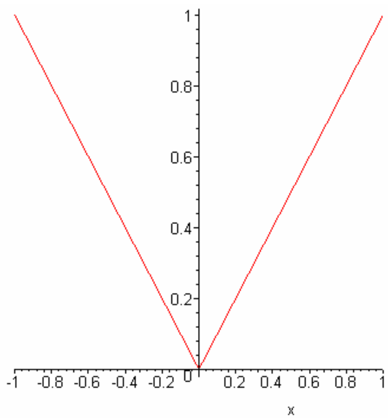



```
> RollesTheorem(x^4 - 3*x^2 + 1, x=-2..2);
```



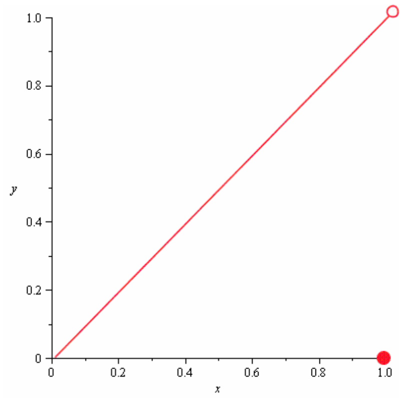
შენიშვნა. როლის თეორემას ვერ გამოვიყენებთ , თუ დარღვეულია ერთ-ერთი პირობა, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=|x|$, განსაზღვრული $[-1,1]$ სეგმენტზე. ეს ფუნქცია უწყვეტია $[-1,1]$ სეგმენტზე, $f(-1)=f(1)=1$ და წარმოებადია $(-1,1)$ ინტერვალში, გარდა კოორდინატთა სათავისა (შესრულებულია 1) და 3)). მაშასადამე, დარღვეულია $(-1,1)$ ინტერვალში ფუნქციის წარმოებადობის პირობა. როლის თეორემას მოცემული ფუნქციისთვის ვერ გამოვიყენებთ. მართლაც, $f'(x)=1$, როცა $x>0$ და $f'(x)=-1$, როცა $x<0$, ხოლო $x=0$ წერტილში f ფუნქციას არა აქვს წარმოებული. ამრიგად, $(-1,1)$ ინტერვალში მოცემული ფუნქციის წარმოებული არსად ნული არ არის.



ვთქვათ

$$f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1 \\ 0, x=1 \end{cases}.$$



როლის თეორემის ყველა პირობა შესრულებულია გარდა 1)-სა და $f'(x)=1\ne 0, 0\le x<1$.

და ბოლოს, ფუნქცია $f(x)=x, x\in[0,1]$ აკმაყოფილებს როლის თეორემაში 1) და 2) პირობებს, მაგრამ $f'(x)=1\ne 0, 0\le x\le 1$.

ლაგრანჟის თეორემა

თეორემა 5. 12 (ლაგრანჟის). თუ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია (a,b) ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\varphi(x)=[f(x)-f(a)](b-a)-[f(b)-f(a)](x-a).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\varphi(a)=0, \qquad \varphi(b)=0$$

ამას გარდა φ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია (a,b) ინტერვალში. ამრიგად φ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და, მაშასადამე, (a,b) ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$\varphi'(x_0)=0.$$

მაგრამ

$$\varphi'(x) = f'(x)(b-a) - [f(b) - f(a)].$$

მაშასადამე,

$$f'(x_0)(b-a) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

საიდანაც

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ლაგრანჟის თეორემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:

ვინაიდან

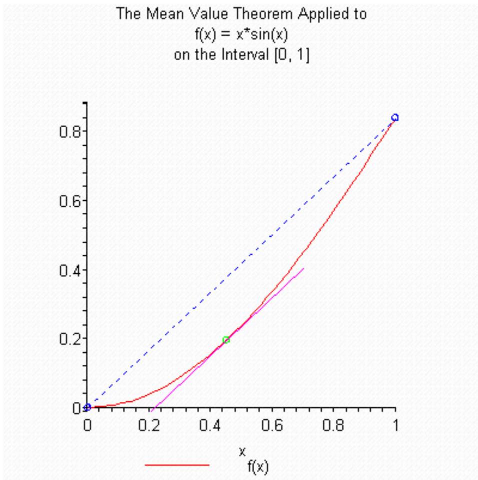
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

არის $(a, f(a))$ და $(b, f(b))$ წერტილებზე გავლებული წრფის საკუთხო კოეფიციენტი, ხოლო $f'(x_0)$-კი f ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტია და

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

ამიტომ გრაფიკზე არსებობს $(x_0, f(x_0))$ წერილი, რომელზეც გავლებული მხები პარალელურია $(a, f(a))$ და $(b, f(b))$ წერტილებზე გამავალი წრფის.

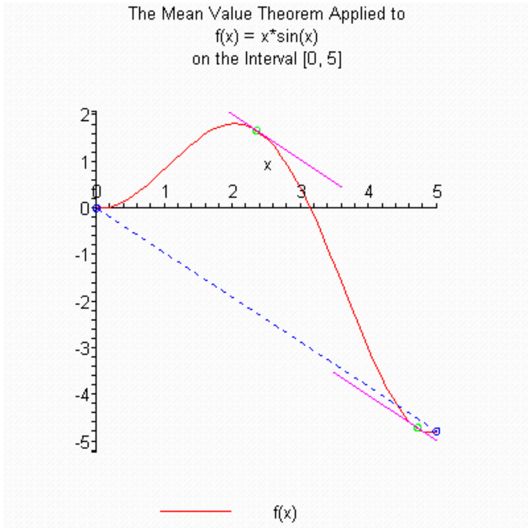
```
> with(Student[Calculus1]):
MeanValueTheorem(x*sin(x),0..1);
```



შევნიშნოთ, რომ ასეთი წერტილები შეიძლება იყოს ერთზე მეტი.

მაგალითი 5. 22.

```
> with(Student[Calculus1]):
MeanValueTheorem(x*sin(x),0..5);
```

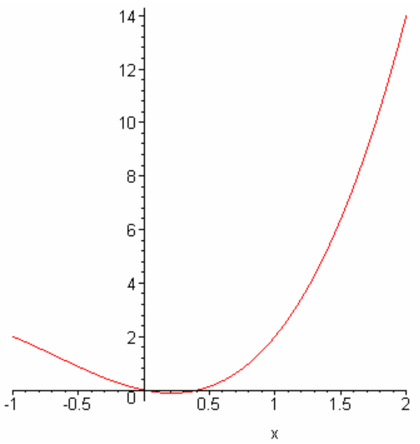


მაგალითი 5. 23. ვთქვათ $f(x)=x^3+2x^2-x,\quad a=-1, b=2$-თვის ვიპოვოთ x_0 წერილი, რომლისთვისაც $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$.

```
> f:=x->x^3+2*x^2-x;
```

$$f:=x\to x^3+2\,x^2-x$$

```
> plot(f(x),x=-1..2);
```



```
> g:=x->diff(f(x),x);
```

$$g:=x\to \mathrm{diff}(\mathrm{f}(x),x)$$

```
> g(c);
```

$$3\,c^2+4\,c-1$$

```
> g(c)=(f(2)-f(-1))/(2-(-1));
```

$$3\,c^2+4\,c-1=4$$

```
> solve(%,c);
```

$$-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{19}}{3},\ -\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{19}}{3}$$

```
> evalf(-2/3+1/3*19^(1/2));
```

0.7862996483

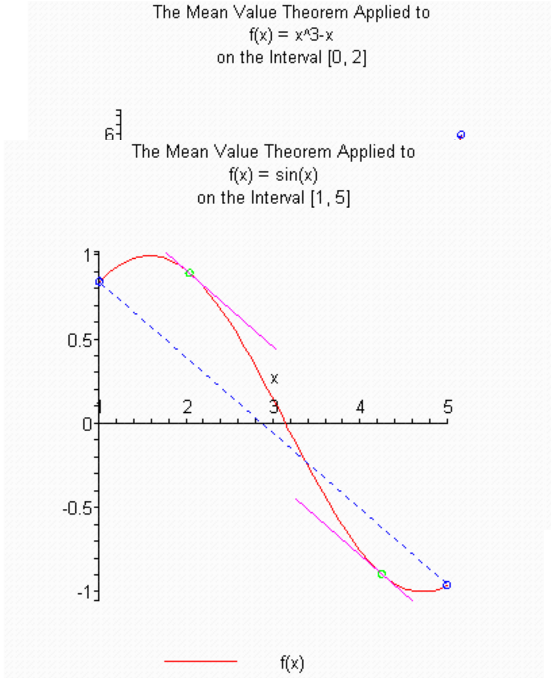
```
> evalf(-2/3-1/3*19^(1/2));
```

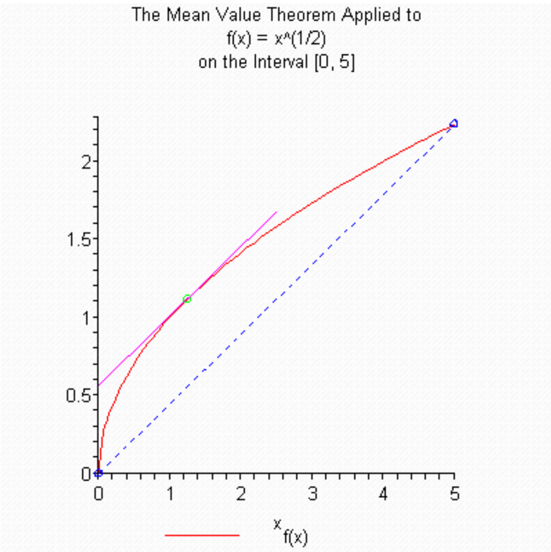
-2.119632982

ვინაიდან -2.119632982 არ ეკუთვნის განსახილველ შუალედს, ამიტომ $x_0 \approx 0.7862996483$

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

```
> MeanValueTheorem(x^3 - x, x=0..2);
MeanValueTheorem(sin(x), 1..5);
MeanValueTheorem(sqrt(x), x=0..5);
```





შედეგი. ვთქვათ,

$f'(x) = g'(x)$ $x \in (a,b)$.

მაშინ არსებობს მუდმივი c ისეთი, რომ

$$f(x) = g(x) + c.$$

ლოპიტალის წესი და მისი გამოყენება ზღვრების გამოთვლისას

თეორემა. ვთქვათ, f და g ფუნქციები წარმოებადია a წერტილის მიდამოში გარდა შესაძლებელია a წერტილში, ამასთან $g'(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ან

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

და არსებობს ზღვარი $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

მაშინ

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ეს თეორემა ცნობილია ლოპიტალის თეორემის სახელწოდებით.

მაგალითი 5. 24. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

ლოპიტალის წესის თანახმად

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x}=1.$$

მაგალითი 5. 25. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

ლოპიტალის თეორემის თანახმად

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

მაგალითი 5. 26. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{2\cos x}=1.$$

მაგალითი 5. 27. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

3. $0\cdot\infty$ **სახის განუზღვრელობა.** ვთქვათ, f და g ფუნქციები ისეთია, რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. მაშინ $f\,g$ ნამრავლი $x=a$ წერტილში მოგვცემს $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობას. ასეთი სახის განუზღვრელობის გახსნა ხერხდება ისევ ლოპიტალის წესით. მართლაც, გვაქვს

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

აქედან ჩანს , რომ $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობის გახსნა დაიყვანება $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ განუზღვრელობის გახსნამდე.

მაგალითი 5. 28. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} = -\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

4. $\infty-\infty$ **სახის განუზღვრელობა.** ვთქვათ, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$. ამ შემთხვევაში ზღვრის გამოთვლა შესაძლებელია დავიყვანოთ $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობის გახსნამდე. მართლაც,

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}.$$

მაგალითი 5. 29.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{\tan x+\dfrac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)\tan x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(1+x^2\right)\dfrac{\tan x}{x}+1}=0.$$

5. 1^∞ **სახის განუზღვრელობა.** ვთქვათ, f და g ფუნქციები ისეთია, რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ მაშინ $y=[f(x)]^{g(x)}$ ფუნქცია, როცა $x\to a$ მოგვცემს 1^∞ სახის განუზღვრელობას. მაშინ

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}.$$

მაგალითი 5. 30.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(-1/x^2\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-1/x^2\right)}} = e.$$

6. ∞^0 **და** 0^0 **სახის განუზღვრელობები.** ვთქვათ, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, მაშინ $y=[f(x)]^{g(x)}$ ფუნქცია, როცა $x\to a$ გვაძლევს ∞^0 სახის განუზღვრელობას, რომლის გახსნა დაიყვანება $\frac{\infty}{\infty}$ სახის (ან $\frac{0}{0}$ სახის) განუზღვრელობის გახსნამდე შემდეგი გარდაქმნის დახმარებით:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}}.$$

თუ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, მაშინ $y=[f(x)]^{g(x)}$ ფუნქცია, როცა $x\to a$ გვაძლევს 0^0 სახის განუზღვრელობას, რომლის გახსნა ხდება იმავე ფორმულით.

ტეილორის ფორმულა

განსაზღვრება. ვიტყვით რომ $f(x)=O(g(x))$, როცა $x\to a$, თუ არსებობს K დადებითი რიცხვი, რომლისთვისაც

$$|f(x)|\le K|g(x)|$$

უტოლობა სრულდება a წერტილის რაღაც მიდამოში.

განსაზღვრება. ვიტყვით რომ $f(x)=o(g(x))$, როცა $x\to a$, თუ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

შემდეგი სახის ფუნქციას

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n$$

ეწოდება n-ური ხარისხის პოლინომი.

მოცემულ პარაგრაფში ჩვენს მიზანს წარმოადგენს მოცემული f ფუნქციის მიახლოება პოლინომების საშუალოებით. თუ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია (a,b) ინტერვალზე, მაშინ, ლაგრანჟის თეორემის ძალით, ნებისმიერი x და x_0-თვის (a,b)-დან არსებობს $\xi\in(x_0,x)$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$

ანუ, რაც იგივეა

$$f(x)=f(x_0)+O((x-x_0)).$$

ტეილორის ფორმულა წარმოადგენს ლაგრანჟის თეორემის განზოგადოებას, კერძოდ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 5. 12 (ტეილორის ფორმულა). თუ f ფუნქციას (a,b) ინტერვალში გააჩნია $n+1$-ური რიგის ჩათვლით უწყვეტი წარმოებული და $x_0,x\in(a,b)$, მაშინ სამართლიანია ფორმულა

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+O((x-x_0)^{n+1}) \quad .$$

ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოდგენა ტეილორის ფორმულით

1. ვთქვათ, $f(x)=e^x$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f^{(n)}(x)=e^x, n\in N$, $x_0=0$ წერტილში მივიღებთ

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right), \quad x\in R$$

```
> f:=x->exp(x);
```

$$f:=x\to \mathrm{e}^x$$

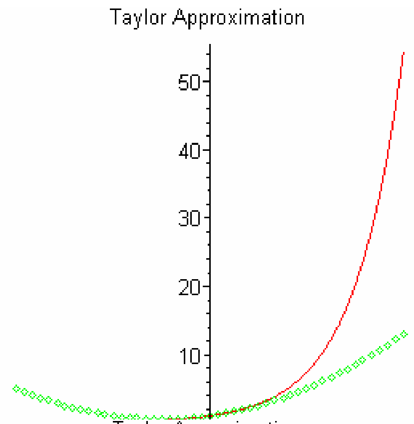
```
> F:=(x,n)->convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);
```

$$F:=(x,n)\to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x),x=0,n),polynom)$$

```
> F(x,3);
```

$$1+x+\frac{1}{2}x^2$$

```
> plot([f(x),F(x,3)],x=-4..4,title="Taylor Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor Approximation"]);
```




```
> f:=x->exp(x);
```

$$f:=x\to \mathrm{e}^x$$

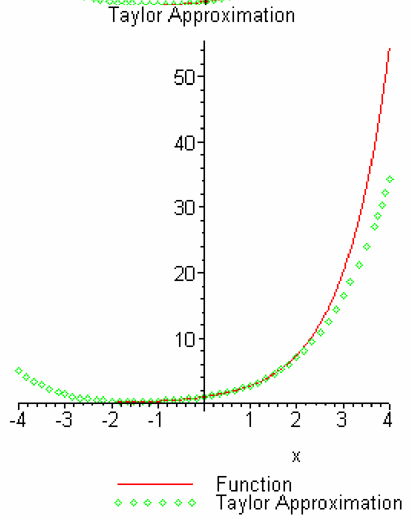
```
> F:=(x,n)->convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);
```

$$F:=(x,n)\to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x),x=0,n),polyno$$

```
> F(x,5);
```

$$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$$

```
> plot([f(x),F(x,5)],x=-4..4,title="Taylor Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor Approximation"]);
```




```
> > f:=x->exp(x);
```

$$f:=x\to \mathrm{e}^x$$

```
> F:=(x,n)-
>convert(taylor(f(x),x=0,n),polyno
```

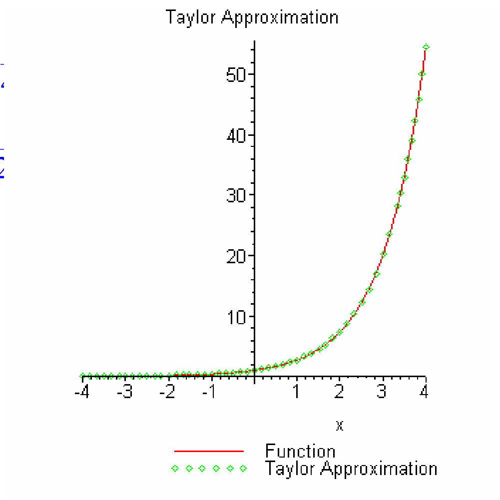
```
m);
```

$$F := (x, n) \to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x), x = 0, n), polynom)$$

```
> F(x,15);
```

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{3628800}x^{10} + \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{479001600}x^{12} + \frac{}{62\ldots}$$
$$+ \frac{1}{87178291200}x^{14}$$

```
> plot([f(x),F(x,15)],x=-4..4,title="Taylor Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor Approximation"]);
```



2. ვთქვათ, $f(x) = \sin x$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}n), \quad n \in N \quad ,$$

მაშინ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$, \quad x \in R.$

```
> f:=x->sin(x);
```

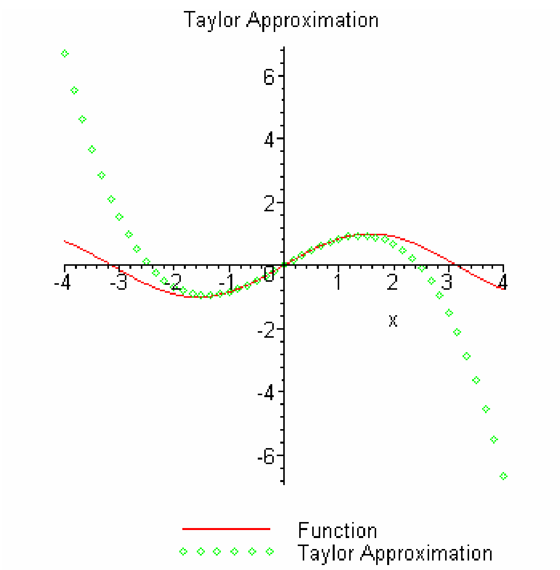
$$f := x \to \sin(x)$$

```
> Order:=5;
```

$$Order := 5$$

```
> taylor(f(x),x=0);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{O}(x^5)$$




```
> F:=(x,n)->convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);
```

$$F := (x, n) \to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x), x = 0, n), polynom)$$

```
> F(x,5);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3$$

```
> plot([f(x),F(x,5)],x=-4..4,title="Taylor Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor Approximation"]);
```

```
> f:=x->sin(x);
```

$$f := x \to \sin(x)$$

```
> Order:=7;
```

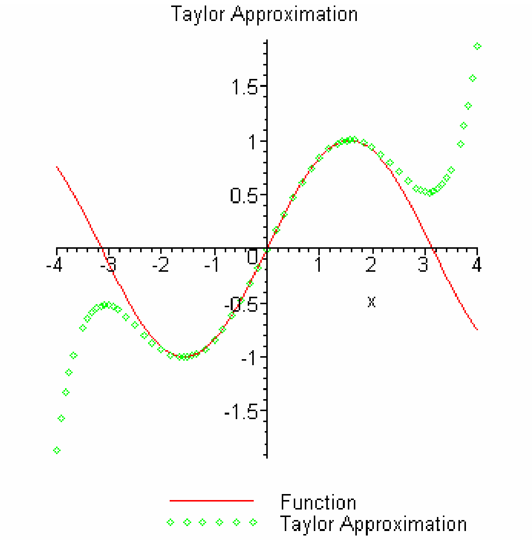
$$Order := 7$$

```
> taylor(f(x),x=0);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)$$

```
> F:=(x,n)->convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);
```

$$F := (x, n) \to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x), x = 0, n), polynom)$$




```
> F(x,7);
```

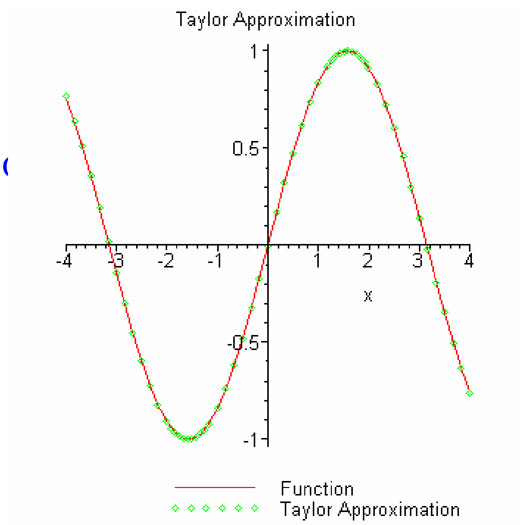
$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

```
> plot([f(x),F(x,7)],x=-
4..4,title="Taylor
Approximation",style=[LINE,POINT],leg
end=["Function","Taylor
Approximation"]);

>
> f:=x->sin(x);
```

$$f := x \to \sin(x)$$

```
> Order:=12;
```

$$Order := 12$$




```
> taylor(f(x),x=0);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + ($$

```
> F:=(x,n)-
>convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);
```

$$F := (x, n) \to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x), x = 0, n), polynom)$$

```
> F(x,12);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11}$$

```
> plot([f(x),F(x,12)],x=-4..4,title="Taylor
Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor
Approximation"]);
```

3. ვთქვათ, $f(x) = \cos x$ მაშინ

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right), \qquad x \in R.$$

> `f:=x->cos(x);`

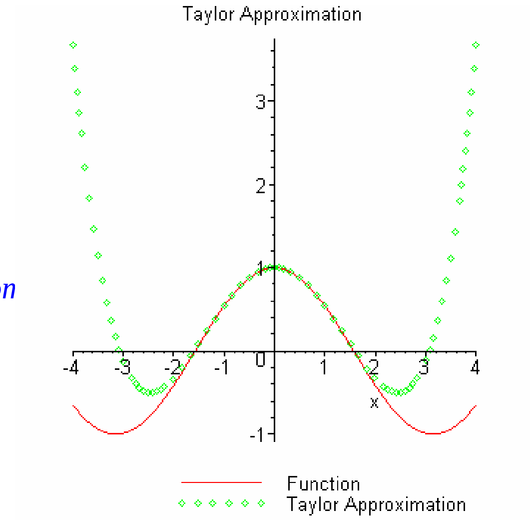
$$f := x \to \cos(x)$$

> `Order:=6;`

$$Order := 6$$

> `taylor(f(x),x=0);`

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$



> `F:=(x,n)->convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);`

$$F := (x, n) \to \text{convert}(\text{taylor}(\text{f}(x), x = 0, n), polynon$$

> `F(x,6);`

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

> `plot([f(x),F(x,6)],x=-4..4,title="Taylor Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor Approximation"]);`

>

> `f:=x->cos(x);`

$$f := x \to \cos(x)$$

> `Order:=9;`

$$Order := 9$$

> `taylor(f(x),x=0);`

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + O(x^9)$$

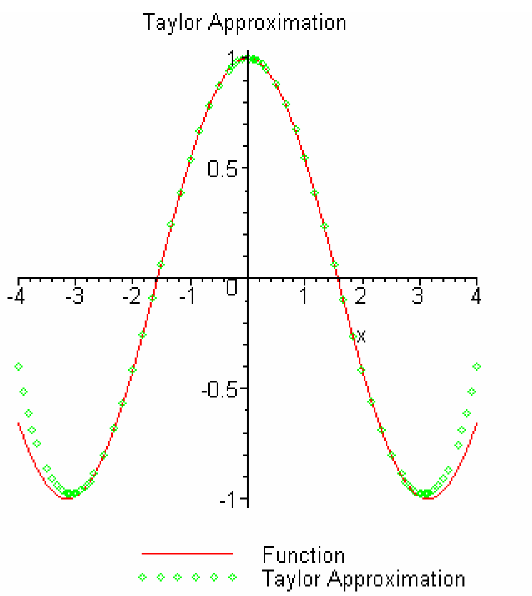
> `F:=(x,n)->convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);`

$$F := (x, n) \to \text{convert}(\text{taylor}(\text{f}(x), x = 0, n), polynom)$$

> `F(x,9);`

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8$$

> `plot([f(x),F(x,9)],x=-4..4,title="Taylor Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor Approximation"]);`



>

4. ვთქვათ $f(x) = \ln(1+x)$. მაშინ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

```
> f:=x->ln(1+x);
```

$$f := x \to \ln(1+x)$$

```
> Order:=5;
```

$$Order := 5$$

```
> taylor(f(x),x=0);
```

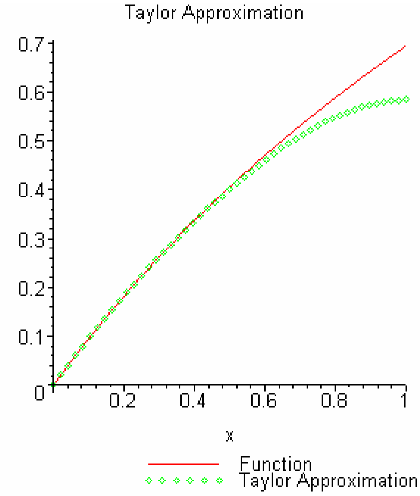
$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

```
> F:=(x,n)-
>convert(taylor(f(x),x=0,n),polynom);
```

$$F := (x, n) \to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x), x = 0, n), polynom)$$

```
> F(x,5);
```

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$




```
>
plot([f(x),F(x,5)],x=0..1,title="Taylor Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor Approximation"]);
```

```
> f:=x->ln(1+x);
```

$$f := x \to \ln(1+x)$$

```
> Order:=10;
```

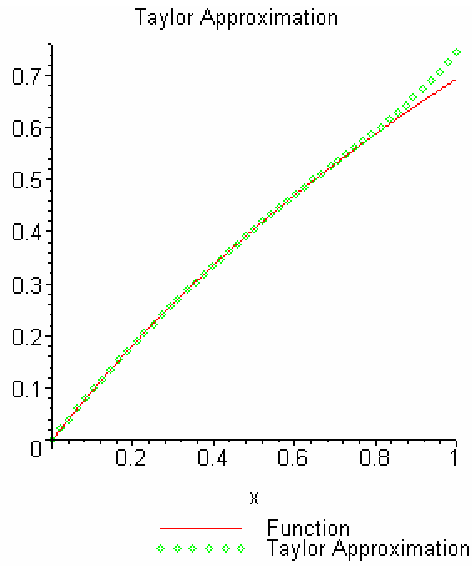
$$Order := 10$$

```
> taylor(f(x),x=0);
```

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 +$$

```
> F:=(x,n)-
>convert(taylor(f(x),x=0,n),poly
nom);
```

$$F := (x, n) \to \mathrm{convert}(\mathrm{taylor}(\mathrm{f}(x), x = 0, n), poly$$



```
> F(x,10);
```

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{9}x^9$$

```
> plot([f(x),F(x,10)],x=0..1,title="Taylor
Approximation",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Taylor
Approximation"]);
```

სავარჯიშოები

იპოვეთ f ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში, თუ

ა) $f(x)=x^2-1$ და $x_0=1$;

ბ) $f(x)=x^3-2x$ და $x_0=-1$;

გ) $f(x)=-2x^2+x$ და $x_0=2$;

დ) $f(x)=-x^2+3x+2$ და $x_0=-2$.

იპოვეთ f ფუნქციის ნაზრდი, თუ

ა) $f(x)=-x^3+3$, $x=1$ და $h=2$;

ბ) $f(x)=|x|$, $x=0$ და $h=0{,}1$;

გ) $f(x)=|x|$, $x=0$ და $h=-0{,}1$;

დ) $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$ და $h=\frac{\pi}{6}$

ჩაწერეთ f ფუნქციის ნაზრდი x წერტილში, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის h ნაზრდს, თუ

ა) $f(x)=ax+b$;

ბ) $f(x)=ax^2+bx+c$;

გ) $f(x)=\sin x$;

დ) $f(x)=\cos x$;

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის წარმოებული:

1. ა) $y=3x^5-2x^2+3$; ბ) $y=4x^7-3x^5-2x+8$;
   გ) $y=2x^8-x^6-3x^5+4$; დ) $y=6x^9-3x^5+7x-12$.
2. ა) $y=3x^3+\sqrt{x}+\frac{4}{x}+3$; ბ) $y=4x^5-3\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}-8$;
   გ) $y=\frac{2}{3}x^6-2\sqrt[5]{x^2}-5x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}$; დ) $y=2x^{\frac{3}{5}}-\frac{\sqrt[4]{x^3}}{7}+\frac{1}{x^9}-1$.
3. ა) $y=2\cos x-3\sin x$; ბ) $y=4\tan x-\frac{2}{5}\cot x$;
   გ) $y=\sqrt{2}\tan x+\frac{1}{3}\cos x$; დ) $y=4\cot x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x$.
4. ა) $y=2\arcsin x+5\arccos x$; ბ) $y=3\arctan x-arc\cot x$;

გ) $y=\sqrt{5}\arccos x-\frac{1}{4}\arctan x-\tan x$; დ) $y=4\arcsin x+6tgx-2arc\cot x$.

5. ა) $y=2^x-e^x-\log_2 x+\ln x$; ბ) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-2\lg x+4\ln x-5$;

გ) $y=\frac{1}{e^x}-4^x-\ln x+\log_{\frac{1}{3}} x+5$; დ) $y=7e^x-\log_5 x+\frac{6}{4^x}-5\ln x+8$.

6. ა) $y=x^2\sin x-e^x\cos x+2^x\tan x$;

ბ) $y=3x^5\ln x-4e^x\cot x-3\cos x\arctan x$;

გ) $y=6\sqrt[3]{x^4}\cdot\cos x-2\arcsin x\cdot\log_2 x-5x^9e^x$;

დ) $y=-3\sqrt[11]{x^6}\cdot\cot x-4\sin x\cdot\ln x+2^x\arccos x$.

7. ა) $y=\cos x\cdot e^x\cdot\log_2 x$; ბ) $y=3x^5\tan x\cdot\cos x$;

გ) $y=2\sqrt{x^2}\cdot arc\cot x\cdot 5^x$; დ) $y=\frac{3}{x^2}\arcsin x\cdot\ln x$.

8. ა) $y=\frac{2x^2-3x+1}{3x^4+x^2+2}-\frac{\cos x}{3+\sin x}$; ბ) $y=\frac{3x^3-2x+5}{3x^2+x-1}+\frac{e^x}{\cos x-\ln x}$;

გ) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-x+4}-\frac{3^x-x^4}{\arccos x+5}$; დ) $y=\frac{x^4-2x-4}{x+\sqrt{x}}-\frac{x+\lg x}{\cos x-e^x}$.

9. ა) $y=\frac{(x^2-2x)\sin x}{e^x(\cos x+x^3)}$; ბ) $y=\frac{(3x^4-2x)\tan x}{2^x(\arcsin x+4)}$;

გ) $y=\frac{(\sqrt[4]{x}+3)\ln x}{(x^2-\cot x)3^x}$; დ) $y=\frac{(2x^3-\sqrt{x})e^x}{x^2\tan x}$.

გამოიყენეთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი და იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის წარმოებული:

1. ა) $y=(2x+1)^{10}-5\cos^2 x$; ბ) $y=(3x^2-x)^{20}+\sin^2 x$;

გ) $y=(x^3-4x^2)^8-\tan^4 x$; დ) $y=(2x-\sqrt{x})^4-3\cot^9 x$.

2. ა) $y=\sin^3 x\cos 2x-e^{4x}\lg(3x)$; ბ) $y=\sin^5 x\tan 4x-2^{3x^2}\ln(3x)$;

გ) $y=\cos^3 3x\sin 6x-5\ln(2x+3)\cot x^2$; დ) $y=\arcsin^2 x\cdot\cos 4x-e^{2x-3}\ln(2x+3)$.

3. ა) $y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$; ბ) $y=y=\lg^3 x-\ln\frac{x}{3}$;

გ) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$; დ) $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$;

4. ა) $y=\sin(\sin 3x)$; ბ) $y=\sin(\cos^2(\tan^3 x))$;

გ) $y=\ln(\ln(\ln x))$; დ) $y=\arctan(\tan^2 x)$.

გააწარმოეთ ფუნქცია:

1. ა) $y=x^x$; ბ) $y=(x-1)^{2x}$;

გ) $y=(\cos x)^x$; დ) $y=(\ln x)^{x+1}$.

2. ა) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;   ბ) $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

გ) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;   დ) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. ა) $y=x^5\arcsin 3x+\tan x^4$;   ბ) $y=(x+1)^2\arctan 3x+\sin x^3$;

გ) $y=\sqrt[3]{x^2+3x}-\sin(2x+\sqrt{x})$;   დ) $y=(2x-1)^2 arc\cot 5x+\sin x^4$.

4. ა) $y=x^{\sin^2 x}+x^7e^{\tan x}$;   ბ) $y=x^{\cos 2x}+\sqrt[3]{x}\cdot e^{\sin x}$;

გ) $y=\arctan(2x+3)-x^{2x+1}$;   დ) $y=x^{x+\sin^2 x}+(x-1)^3e^{1+\tan x}$.

იპოვეთ:

1. ა) $f'(1)$, თუ $f(x)=x^7e^x+x^2$;

ბ) $f'(-1)$, თუ $f(x)=x^3-xe^x$;

გ) $f'(0)$, თუ $f(x)=(3x-1)^{15}$;

დ) $f'(0)$, თუ $f(x)=(2x+1)^{11}$.

2. ა) $f'(\frac{\pi}{6})$, თუ $f(x)=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

ბ) $f'(\frac{\pi}{3})$, თუ $f(x)=\dfrac{\sin x}{4\cos^2 x}$.

გ) $f'(\frac{4}{\pi})$, თუ $f(x)=e^{1+tg\frac{1}{x}}$.

დ) $f'(\frac{2}{\pi})$, თუ $f(x)=3^{tg\frac{1}{2x}}$.

დაწერეთ f ფუნქციის გრაფიკის $(x_0; f(x_0))$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლება, თუ

ა) $f(x)=x^2-5x+6$ და $x_0=4$;

ბ) $f(x)=-x^3-x+3$ და $x_0=1$;

გ) $f(x)=\sin x$ და $x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

დ) $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ და $x_0=-1$.

წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის წარმოებული:

1. ა) $f(x)=x^2-3x$;   ბ) $f(x)=-2x-x^2$;

გ) $f(x)=x^3-2$;   დ) $f(x)=3x-x^3$.

2. ა) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;   ბ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$;

გ) $f(x)=\sqrt{x}$;   დ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

იპოვეთ f ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები $x=0$ წერტილში, თუ:

ა) $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x>0 \\ -2x & x\le 0 \end{cases}$; ბ) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & x\ge 0 \\ 3x+1 & x<0 \end{cases}$;

გ) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x>0 \\ 2-x & x\le 0 \end{cases}$; დ) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1}, & x>0 \\ 2x+1 & x\le 0 \end{cases}$.

იპოვეთ f ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები x_0 წერტილში, თუ:

ა) $f(x)=|x-2|$, $x_0=2$;

ბ) $f(x)=|x+1|$, $x_0=-1$;

გ) $f(x)=|1-3x|$, $x_0=\dfrac{1}{3}$;

დ) $f(x)=|2x+3|$, $x_0=-\dfrac{3}{2}$.

იპოვეთ f ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები x_0 წერტილში და გაარკვიეთ, არის თუ არა ფუნქცია წარმოებადი x_0 წერტილში:

ა) $f(x)=(x+1)|x|$, $x_0=0$;

ბ) $f(x)=x|x+3|$, $x_0=-3$;

გ) $f(x)=x\cdot|x|$, $x_0=0$;

დ) $f(x)=(x-1)|x-1|$, $x_0=1$.

იპოვეთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული, თუ:

ა) $y=x\sqrt{x^2+1}$; ბ) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

გ) $y=(1+x^2)\arctan x$; დ) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

იპოვეთ f ფუნქციის დიფერენციალი x_0 წერტილში, თუ:

ა) $f(x)=3x^2-2x+3$, $x_0=1$;

ბ) $f(x)=-x^2+4x-1$, $x_0=2$;

გ) $f(x)=2x-x^3-2$, $x_0=-1$;

დ) $f(x)=2x^3+3x^2-4x+1$, $x_0=0$.

იპოვეთ $df(x)$, თუ:

ა) $f(x)=x^2e^x$; ბ) $f(x)=(x^2-1)\cos 2x$;

გ) $f(x)=\dfrac{2x+4}{\ln(3x)}$; დ) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$.

ლოპიტალის თეორემის გამოყენებით გამოთვალეთ ზღვრები:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\arctan x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$ 4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}(1-e^x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ 6. $\lim\limits_{x\to 1-}\ln x\ln(1-x)$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5}{x^2+x-6}\right)$ 8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$ 10. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1-x)\right)^{\ln(1-x)}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{c\tan x}$ 16. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ \ +\sin x}{x\ \ +2\sin x}$ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{x^2}$ 20. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{xa^x}$ 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2\pi-x)}{\arctan\frac{2x}{1-x^2}}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{a+ex}$ 24. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin xc\tan x)$

25. $\lim\limits_{x\to 1-}[(1-x)\ln(1-x)]$

ფუნქციის მონოტონურობის შუალედის დადგენა წარმოებულის გამოყენებით. ლოკალური მაქსიმუმის და მინიმუმის, აბსოლუტური მაქსიმუმებისა და მინიმუმების გამოთვლა

თეორემა 5. 13. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია, რომელიც წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალზე. მაშინ $(a;b)$-ზე სამართლიანია შემდეგი:

1) $f'(x)>0 \Rightarrow f$ მკაცრად ზრდადია $\Rightarrow f'(x)\ge 0$;
2) $f'(x)\ge 0 \Rightarrow f$ ზრდადია $\Rightarrow f'(x)\ge 0$;
3) $f'(x)\le 0 \Rightarrow f$ კლებადია $\Rightarrow f'(x)\le 0$;
4) $f'(x)<0 \Rightarrow f$ მკაცრად კლებადია $\Rightarrow f'(x)\le 0$;
5) $f'(x)=0 \Leftrightarrow f$ მუდმივია.

დამტკიცება. ვთქვათ $f'(x)>0$ და დავაფიქსიროთ x_1, $x_2 \in (a,b), x_1<x_2$. მაშინ ლაგრანჟის თეორემის ძალით

$$\boxed{f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\ge 0}.$$

ვთქვათ, f ზრდადია. დავამტკიცოთ, რომ $f'(x)\ge 0$.

ვთქვათ, $x\in(a,b)$. ავიღოთ დადებითი რიცხვი h იმდენად მცირე, რომ $x+h\in (a,b)$. ფუნქციის ზრდადობის გამო ყოველი დადებითი h რიცხვისთვის, გვექნება

$$f(x+h)-f(x)\ge 0.$$

მაშასადამე,

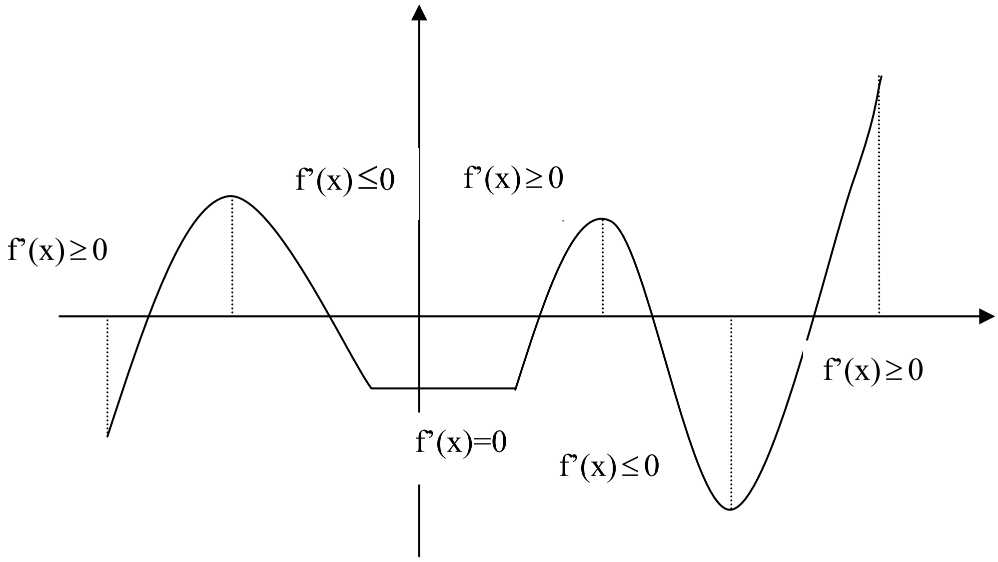
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ge 0. \tag{5. 1}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $h\to 0$, მივიღებთ $f'(x)\ge 0$.
ადვილი დასანახია, რომ (5. 1) უტოლობა სამართლიანია მაშინაც, როცა h უარყოფითი რიცხვია. თეორემის 1) პუნქტი დამტკიცებულია.
ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემის 2)-4) პუნქტები.
ბოლოს დავამტკიცოთ თეორემის 5) პუნქტი.

აქ იგულისხმება, რომ ყველა აღნიშნული პირობა სრულდება $(a;b)$ ინტერვალზე. დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $x_1,x_2\in(a,b)$ და დავამტკიცოთ, რომ $f(x_1)=f(x_2)$. მართლაც, ლაგრანჟის თეორემის ძალით

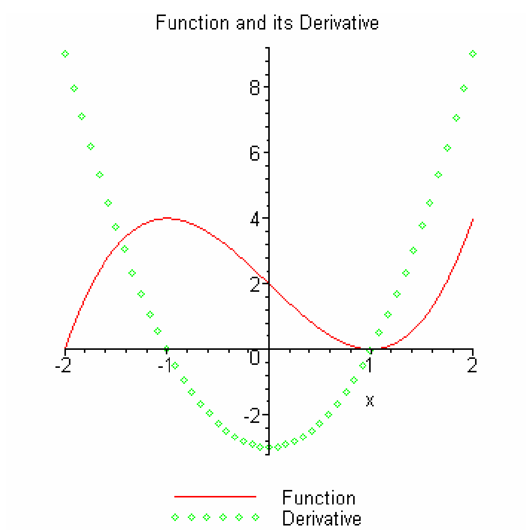
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0(x_2-x_1)=0.$$

შენიშვნა. $f(x)=x^3$ ფუნქციის მაგალითით ჩანს, რომ რაიმე ინტერვალზე წარმოებადი ფუნქციის ზრდადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს ამ ინტერვალზე ფუნქციის წარმოებულის დადებითობა. მართლაც, $f(x)=x^3$ ფუნქცია ზრდადია (-1;1) ინტერვალზე, მაგრამ $f'(0)=3\cdot 0^2=0$, ე. ი. $f'(x)\geq 0$, როცა $x\in(-1;1)$.



მაგალითი 5. 31. ვთქვათ, $f(x)=x^3-3x+2$. მაშინ $f'(x)=3x^2-3$. რადგან $(-\infty;-1)$ ინტერვალზე $f'(x)>0$, ამიტომ ფუნქცია ამ ინტერვალზე ზრდადია; რადგან $(-1;1)$ ინტერვალზე $f'(x)<0$, ამიტომ ფუნქცია ამ ინტერვალზე კლებადია, რადგან $(1;+\infty)$ ინტერვალზე $f'(x)>0$, ამიტომ ფუნქცია ამ ინტერვალზე ზრდადია.

```
> f:=x^3-3*x+2;
```
$$f := x^3 - 3\,x + 2$$
```
> g:=diff(f,x);
```
$$g := 3\,x^2 - 3$$
```
> plot([f,g],x=-2..2,title="Function and its Derivative",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Derivative"]);
```



ლოკალური ექსტრემუმების არსებობის საკმარისი პირობები

თეორემა 5. 14 (I ნიშანი) ვთქვათ, $f:(x_0-\delta;x_0+\delta)\to R$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(x_0-\delta;x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ სიმრავლეზე, ხოლო x_0 წერტილში უწყვეტია. სამართლიანია შემდეგი:

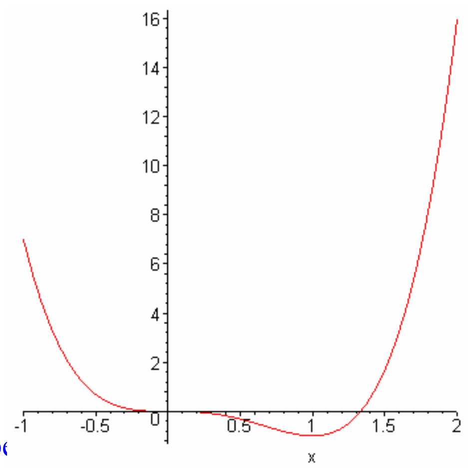
1) თუ $(x_0-\delta;x_0)$-ზე $f'(x)<0$ და $(x_0;x_0+\delta)$-ზე $f'(x)<0$, მაშინ x_0 წერტილში f ფუნქციას ექსტრემუმი არა აქვს.
2) თუ $(x_0-\delta;x_0)$-ზე $f'(x)<0$ და $(x_0;x_0+\delta)$-ზე $f'(x)>0$, მაშინ x_0 არის f ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მინიმუმის წერტილი.
3) თუ $(x_0-\delta;x_0)$-ზე $f'(x)>0$ და $(x_0;x_0+\delta)$-ზე $f'(x)<0$, მაშინ x_0 არის f ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი.
4) თუ $(x_0-\delta;x_0)$-ზე $f'(x)>0$ და $(x_0;x_0+\delta)$-ზე $f'(x)>0$, მაშინ x_0 წერტილში f ფუნქციას ექსტრემუმი არა აქვს.

მაგალითი 5. 32. ვთქვათ $y=3x^4-4x^3$. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები.

```
> y:=3*x^4-4*x^3;
```

$$y := 3\,x^4 - 4\,x^3$$

```
> plot(y,x=-1..2);
```




```
> y1:=diff(y,x);
```

$$y1 := 12\,x^3 - 12\,x^2$$

```
> solve(y1,x);
```

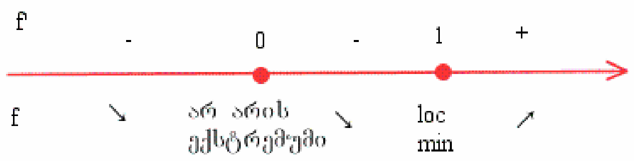
$$1,\ 0,\ 0$$

```
> solve(y1>0,x);
```

$$\text{RealRange}(\text{Open}(1),\ \infty)$$

```
> solve(y1<0,x);
```

$$\text{RealRange}(-\infty,\ \text{Open}(0)),\ \text{RealRange}(\text{Open}(0),\ \text{Ope}$$



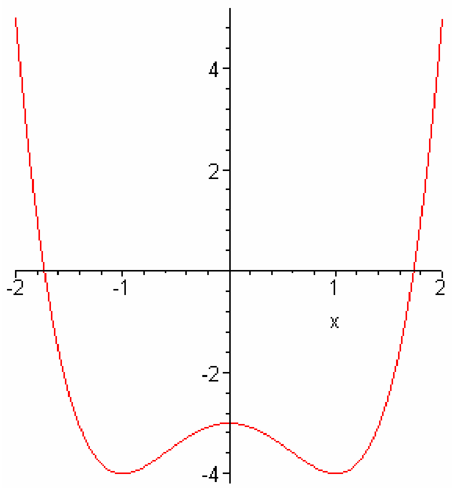
ვინაიდან $(-\infty,0)\cup(0,1)$-ზე ფუნქციის წარმოებული უარყოფითია, ამიტომ 0 არ არის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, ხოლო $x=1$ წერტილში ფუნქციას გააჩნია ლოკალური მინიმუმი.

მაგალითი 5. 33. პროგრამა MAPLE-ის გამოყენებით ვიპოვოთ $f(x)=x^4-2x^2-3$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები $[-2,2]$ სეგმენტზე.

```
> y:=x^4-2*x^2-3;
```

$$y := x^4 - 2\,x^2 - 3$$

```
> plot(y,x=-2..2);
```




```
> y1:=diff(y,x);
```

$$y1 := 4\,x^3 - 4\,x$$

```
> solve(y1=0,x);
```

0, 1, -1

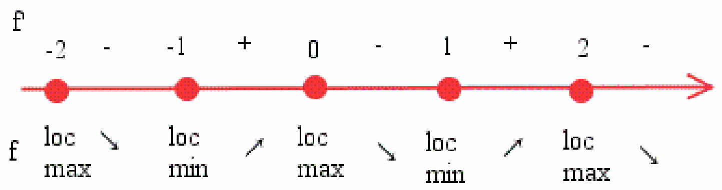
```
> solve(y1>0,x);
```

RealRange(Open(-1), Open(0)), RealRange(Open(1), ∞)

```
> solve(y1<0,x);
```

RealRange(−∞, Open(-1)), RealRange(Open(0), Open(1))

```
>
```



თეორემა 5. 15 (II ნიშანი) ვთქვათ, $f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to R$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია n-ური რიგის ჩათვლით ყველა წარმოებული. ვთქვათ

$$f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0 \qquad \text{და} \qquad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

მაშინ, თუ n კენტია, x_0 წერტილში f ფუნქციას ექსტრემუმი არა აქვს.
თუ n ლუწია, მაშინ x_0 წერტილში f ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი აქვს. კერძოდ, თუ $f^{(n)}(x_0)>0$, მაშინ x_0 არის f ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მინიმუმის წერტილი, ხოლო თუ $f^{(n)}(x_0)<0$, მაშინ x_0 არის f ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი.

მაგალითი 5. 34. ვთქვათ $f(x)=x^4-8x^2+12$. ვიპოვოთ ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები.

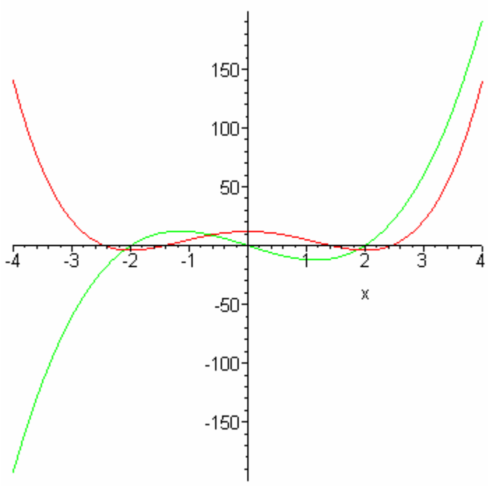
```
> f:=x^4-8*x^2+12;
```

$$f:=x^4-8\,x^2+12$$

```
> g:=diff(f,x);
```

$$g:=4\,x^3-16\,x$$

```
> plot([f,g],x=-4..4);
```




```
> solve(g,x);
```

$$0, 2, -2$$

```
> h:=diff(g,x);
```

$$h := 12\,x^2 - 16$$

```
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> h;
```

$$-16$$

```
> "x=0 is locmax":
> x:=2;
```

$$x := 2$$

```
> h;
```

$$32$$

```
> "x=2 is locmin":
> x=-2;
```

```
> h;
```

$$32$$

```
> "x=-2 is locmin":
>
```

სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების გამოთვლა

თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ მას გააჩნია აბსოლუტური (გლობალური) მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი და ის ემთხვევა ერთერთ ლოკალურ მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილს.

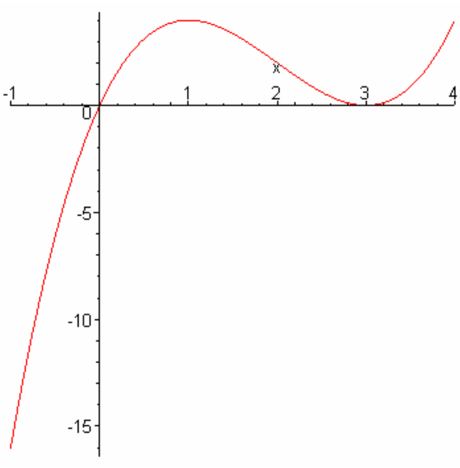
იმისათვის, რომ მოვძებნოთ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, საჭიროა გამოვთვალოთ მისი ყველა ლოკალური მაქსიმუმი და ყველა ლოკალური მინიმუმი. მოცემულ ყველა რიცხვს შორის უდიდესი იქნება f ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი– უმცირესი მნიშვნელობა.

მაგალითი 5. 34. იპოვეთ $f(x)=x^3-6x^2+9x$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმები $[-1;4]$ სეგმენტზე.

```
> f:=x^3-6*x^2+9*x;
```

$$f := x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$$

```
> plot(f,x=-1..4);
```




```
> diff(f,x);
```

$$3\,x^2 - 12\,x + 9$$

```
> solve(%,x);
```

$$3,\ 1$$

```
> x:=-1:
> f;
```

$$-16$$

```
> x:=1:
> f;
```

$$4$$

```
> x:=3:
> f;
```

$$0$$

```
> x:=4:
> f;
```

$$4$$

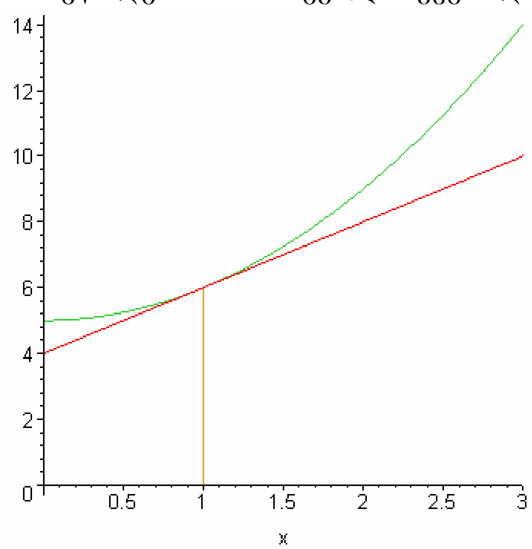
```
> "AbsMax=4, when x=1 or x=4":
> "AbsMin=-16, when x=-1 ":
>
```

ფუნქციის ამოზნექილობის დადგენა წარმოებულის გამოყენებით, გადაღუნვის წერტილები

განსაზღვრება 5. 6. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია, რომელიც წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალზე. f ფუნქციას ეწოდება ამოზნექილი ქვემოდან $(a;b)$ ინტერვალზე, თუ ფუნქციის გრაფიკის ყოველი წერტილი იქნება გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების ზემოთ.

ნახაზზე გამოსახულია ქვემოდან ამოზნექილი ფუნქციის გრაფიკი:

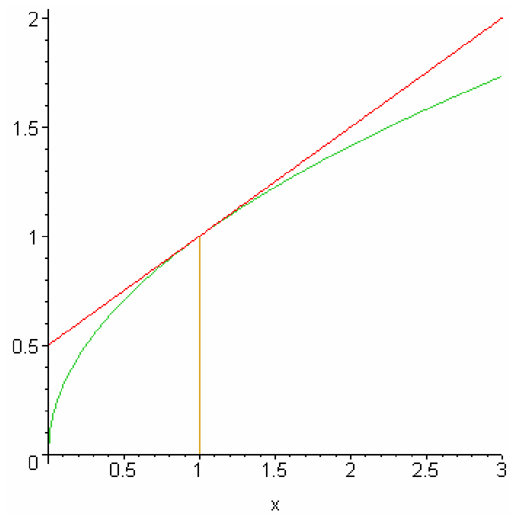
```
> with(student):
> showtangent(x^2+5,x=1,x=0..3);
```



განსაზღვრება 5. 6. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია, რომელიც წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალზე. f ფუნქციას ეწოდება ამოზნექილი ზემოდან $(a;b)$ ინტერვალზე, თუ ფუნქციის გრაფიკის ყოველი წერტილი იქნება გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების ქვემოთ.

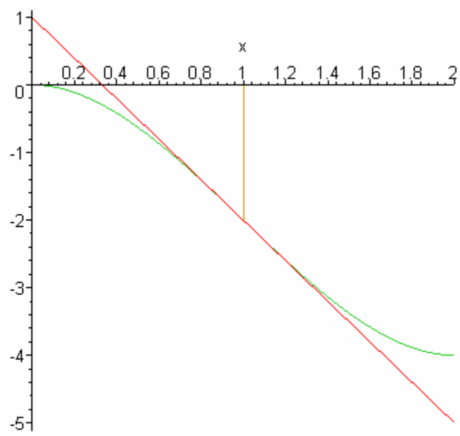
ნახაზზე გამოსახულია ზემოდან ამოზნექილი ფუნქციის გრაფიკი:

```
> with(student):
> showtangent(sqrt(x),x=1,x=0..3);
```



თეორემა 5. 16. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია, რომელსაც $(a;b)$ ინტერვალზე გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული. იმისათვის, რომ ეს ფუნქცია იყოს ამოზნექილი ქვემოდან (ზემოდან) $(a;b)$ ინტერვალზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $(a;b)$ ინტერვალზე $f''(x)\geq 0$ ($f''(x)\leq 0$).

განსაზღვრება 5. 7. წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკის წერტილს, რომელშიც ამოზნექილობის ხასიათი იცვლება საპირისპიროთი, ეწოდება გადაღუნვის წერტილი. გეომეტრიულად x_0 არის გადაღუნვის წერტილი ნიშნავს, რომ არსებობს $\delta>0$ რიცხვი, რომ $(x_0-\delta,x_0)$ ინტერვალში ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს $(x_0;f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხების ერთ მხარეს, ხოლო $(x_0,x_0+\delta)$ ინტერვალში-მხების მეორე მხარეს.



თეორემა 5. 17 თუ f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული რაიმე x_0 წერტილში ხდება ნულის ტოლი ან არ არსებობს და ამ წერტილის მარცხენა მხრიდან მარჯვენა მხარეში გადასვლისას მეორე რიგის წარმოებული ნიშანს იცვლის, მაშინ $(x_0; f(x_0))$ წერტილი არის f ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

მაგალითი 5. 35. ვიპოვოთ $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები, ზემოთ და ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედები.

```
> f:=x->x^3-6*x^2+3*x-5;
```

$$f := x \to x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 5$$

```
> g:=x->diff(f(x),x$2);
```

$$g := x \to \frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{f}(x)$$

```
> solve(g(x),x);
```

$$2$$

ე. ი. 2 არის f ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი.

```
> solve(g(x)>0);
```

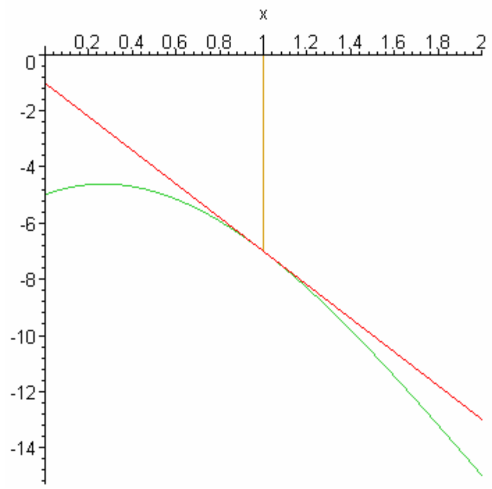
$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(2), \infty)$$

```
> solve(g(x)<0);
```

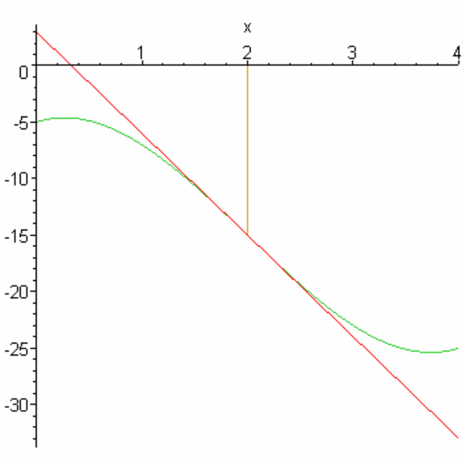
$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(2))$$

მაშასადამე ფუნქცია ამოზნექილია ზემოდან $(-\infty, 2)$ შუალედზე, ხოლო ამოზნექილია ქვემოდან $(2, +\infty)$ შუალედზე.

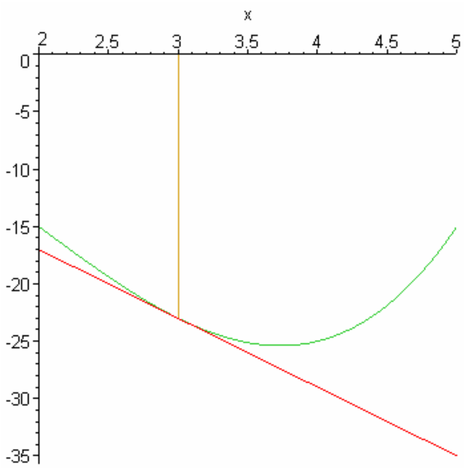
```
> with(student):
> showtangent(f(x),x=1,x=0..2);
```



```
> with(student):
> showtangent(f(x),x=2,x=0..4);
```




```
> with(student):
> showtangent(f(x),x=3,x=2..5);

>
```



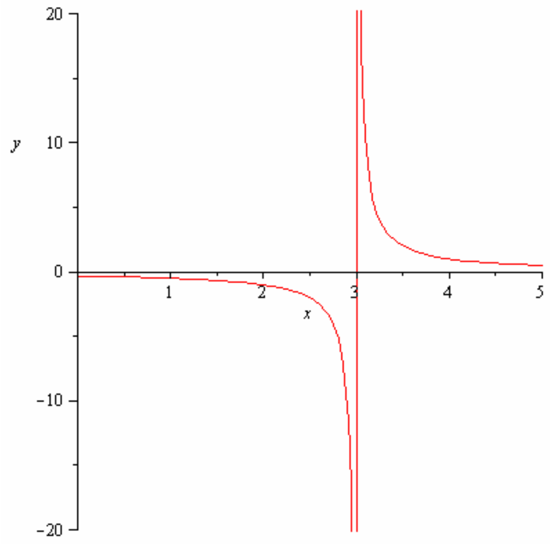
ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

განსაზღვრება. 5. 8 $x = x_0$ წრფეს უწოდებენ f ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალურ ასიმპტოტას, თუ

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ან} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty .$$

შევნიშნოთ, რომ ვერტიკალური ასიმპტოტები არ შეიძლება ჰქონდეს უწყვეტ ფუნქციის გრაფიკს. ასეთი ასიმპტოტები შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ისეთ ფუნქციის გრაფიკს, რომელსაც აქვს მეორე გვარის წყვეტის წერილები.

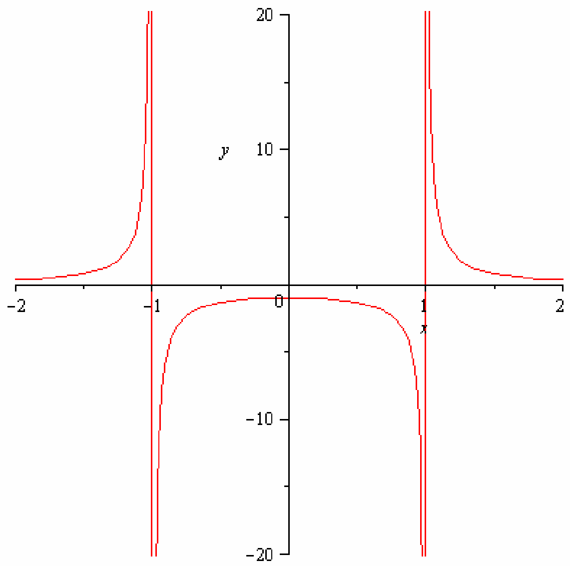
მაგალითი 5. 36. ვთქვათ, $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $\lim\limits_{x \to 3-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ და $\lim\limits_{x \to 3+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$. ამიტომ $x = 3$ მოცემული ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია.



მაგალითი 5. 37. ვთქვათ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. ადვილი დასანახია, რომ

$$\lim_{x\to -1-}\frac{1}{1-x^2}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to -1+}\frac{1}{1-x^2}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1-x^2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{1-x^2}=+\infty.$$

ე. ი. $x=\pm 1$ წრფეები არიან მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტები.

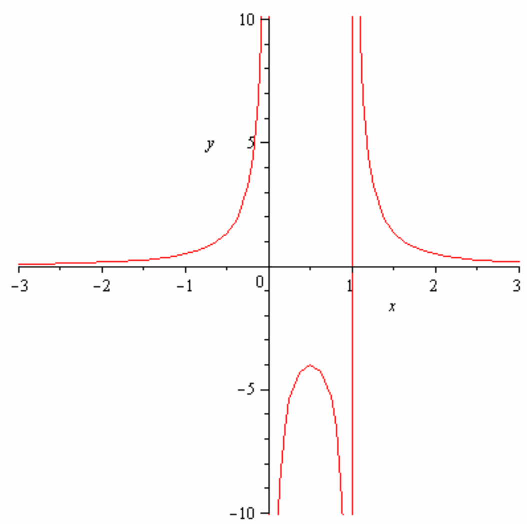


განსაზღვრება. 5. 9 $y=y_0$ წრფეს უწოდებენ f ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალურ ასიმპტოტას, თუ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \qquad \text{ან} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0 .$$

მაგალითი 5. 38. ვთქვათ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$.

რადგანაც $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2-x}=0$. ამიტომ $y=0$ წრფე წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალურ ასიმპტოტს.



$y=kx+b$ წრფეს უწოდებენ f ფუნქციის გრაფიკის დახრილ (თუ $k=0$ ჰორიზონტალურ) ასიმპტოტს, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$f(x)=kx+b+\alpha(x)$, სადაც $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ ან $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=0$.

თეორემა 5. 18. იმისათვის, რომ f ფუნქციის გრაფიკს ჰქონდეს დახრილი $y=kx+b$ ასიმპტოტა, აუცილებელია და საკმარისი , რომ არსებობდეს სასრული ზღვრები:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad \text{და} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b.$$

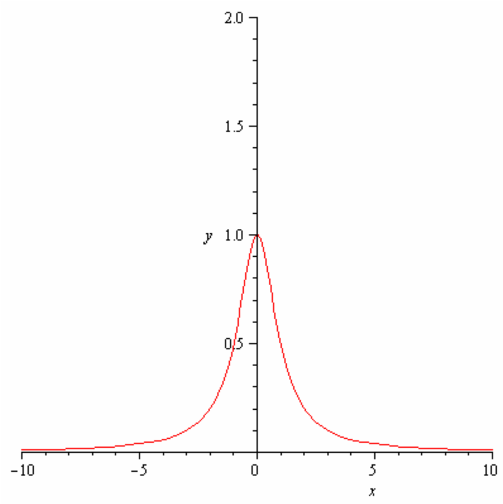
მაგალითი 5. 38. ვთქვათ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(1+x^2)x}=0$$

და

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0.$$

მაშასადამე ფუნქციას გააჩნია ჰორიზონტალური ასიმპტოტი და ეს არის $y=0$ წრფე.



მაგალითი 5. 39. პროგრამა MAPLE-ის გამოყენებით ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-}\frac{x^3}{x^2-3}$$

$$-\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+}\frac{x^3}{x^2-3}$$

$$\infty$$

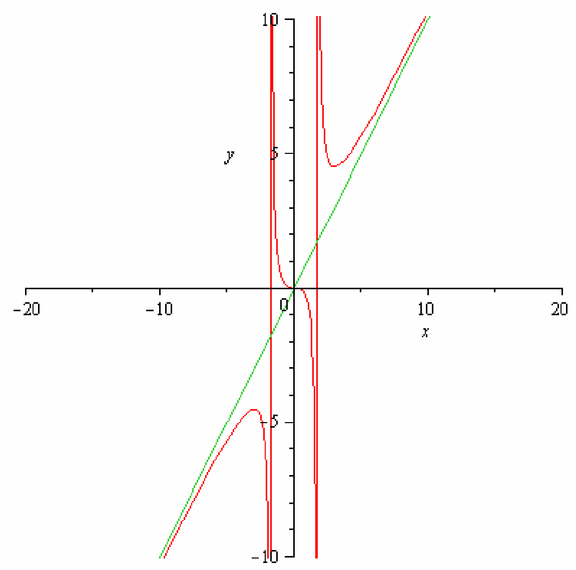
$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-}\frac{x^3}{x^2-3}$$

$$-\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}+} \frac{x^3}{x^2-3}$$

$$\infty$$

მაშასადამე, $x=\pm\sqrt{3}$ წრფეები არიან მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტები. ეხლა ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტები.



$$f := x \to \frac{x^3}{x^2-3}$$

$$x \to \frac{x^3}{x^2-3}$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x)$$

$$b = 0$$

მაშასადამე $y = x$ წრფე მოცემული ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტია.

გრაფიკის აგების ზოგადი სქემა

ორჯერ დიფერენცირებადი (შესაძლოა სასრული რაოდენობით წერტილების გარდა) $y=f(x)$ ფუნქციის გამოკვლევა და მისი გრაფიკის აგება შეიძლება შესრულდეს შემდეგი სქემით:

1) ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე, წყვეტის წერტილები, ვერტიკალური ასიმპტოტები, ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები, oy ღერძთან გრაფიკის გადაკვეთის წერტილი, დავადგინოთ ფუნქციის პერიოდულობა და სიმეტრიულობა;
2) ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტები, თუ ისინი არსებობს;
3) პირველი რიგის წარმოებულის გამოყენებით ვიპოვოთ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები და მონოტონურობის ინტერვალები;
4) მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებით ვიპოვოთ ამოზნექილობის ინტერვალები და გადაღუნვის წერტილები;
5) ვიპოვოთ ლოკალური ექსტრემუმები.
6) გამოკვლევის მიხედვით ავაგოთ გრაფიკი.

სავარჯიშოები

დაადგინეთ f ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები, თუ:

1. ა) $f(x)=3x-x^3$;

ბ) $f(x)=x^2-\dfrac{x^4}{2}$;

გ) $f(x)=2x^5-5x^2$;

დ) $f(x)=5+3x-x^3$.

2. ა) $f(x)=x^6+3x^5+18$;

ბ) $f(x)=3x^7-x^6-8$;

გ) $f(x)=5x^9-9x^5+45x-15$;

დ) $f(x)=3x^4+4x^3+6x^2-16$.

დაადგინეთ f ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები მითითებულ ინტერვალებში:

ა) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, თუ $x\in(0;\pi)$;

ბ) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$, თუ $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$;

გ) $f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}$, თუ $x\in(0;+\infty)$;

დ) $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$, თუ $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ექსტრემუმები:

ა) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+1$;

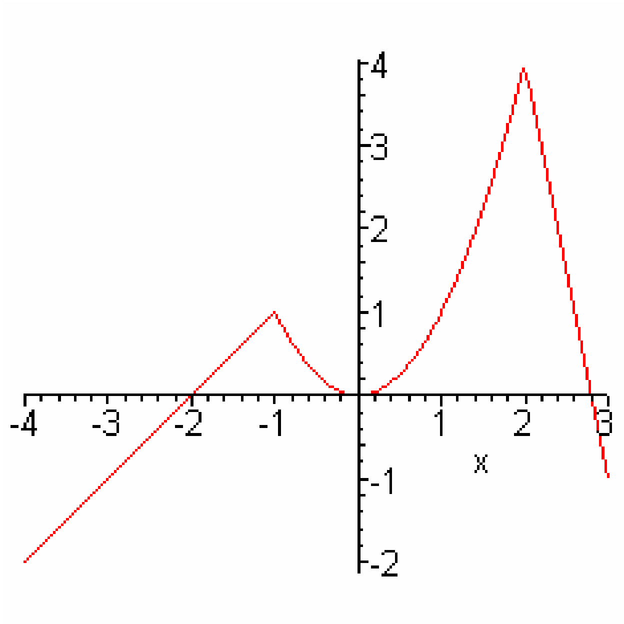
ბ) $f(x)=x^3-\frac{15}{2}x^2+18x-9$.

გ) $f(x)=3x^4-6x^2+4$;

დ) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4+2$;

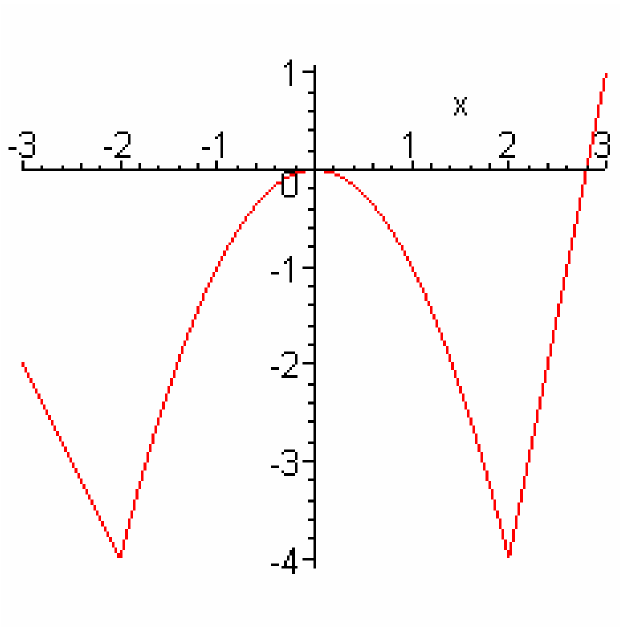
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმები:

ა) $f(x)=\begin{cases} x+2, & -4\le x\le -1, \\ x^2, & -1<x\le 2, \\ -5x+14, & 2<x\le 3. \end{cases}$

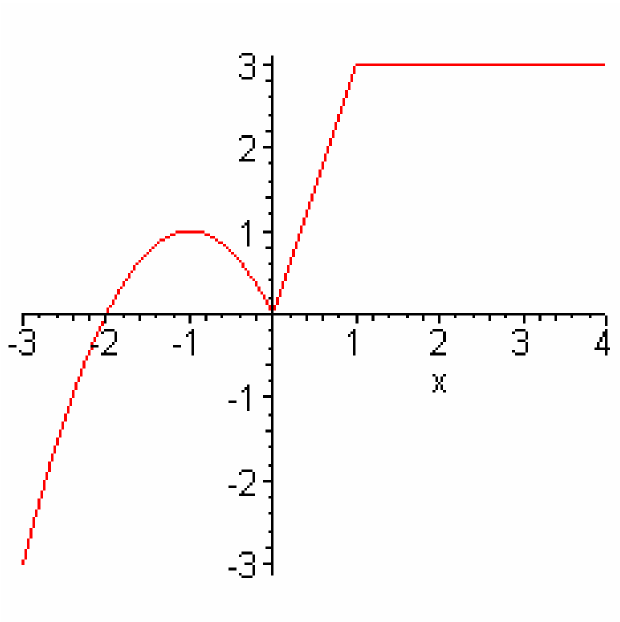


ბ) $f(x)=\begin{cases} (x+2)^2, & -4\le x<-1, \\ -x, & -1<x<1, \\ -(x-2)^2, & 1<x\le 4. \end{cases}$

გ) $f(x)=\begin{cases} -2x-8, & -3\le x<-2, \\ -x^2, & -2<x\le 2, \\ 5x-14, & 2<x\le 3. \end{cases}$



დ) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x, & -3\le x<0, \\ 3x, & 0<x\le 1, \\ 3, & 1<x\le 4. \end{cases}$



იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და გლობალური ექსტრემუმები:

1. ა) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$, $\quad x\in[-3;1]$;

ბ) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$, $x\in[-3;0]$;

გ) $f(x)=\sqrt{x(10-x)}$, $x\in[0;10]$;

დ) $f(x)=x-2\ln x+\dfrac{7}{2}$, $x\in[1;e]$.

2. ა) $f(x)=x^2-|x|$, $x\in[-2;2]$;

ბ) $f(x)=(x+1)^2-|x+1|$, $x\in[-3;1]$;

გ) $f(x)=(x-2)^2-|x-2|$, $x\in[0;4]$.

დ) $f(x)=|x^2-3x+2|$, $x\in[-10;10]$;

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის გადაღუნვის წერტილები და ამოზნექილობის შუალედები:

ა) $y=3x^2-x^3$; ბ) $y=x^4-4x^3$;

გ) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; დ) $y=x+\sin x$.

გამოიკვლიეთ და ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი:

1. ა) $y=3x-x^3$; ბ) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$;

გ) $y=\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$; დ) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

2. ა) $y=(x-3)\sqrt{x}$; ბ) $y=e^{2x-x^2}$;

გ) $y=x+e^{-x}$; დ) $y=\dfrac{e^x}{1+x}$.

რიცხვითი მიმდევრობა. ვთქვათ, მოცემულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $N=\{1,2,...,n,...\}$ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე A ქვესიმრავლე.

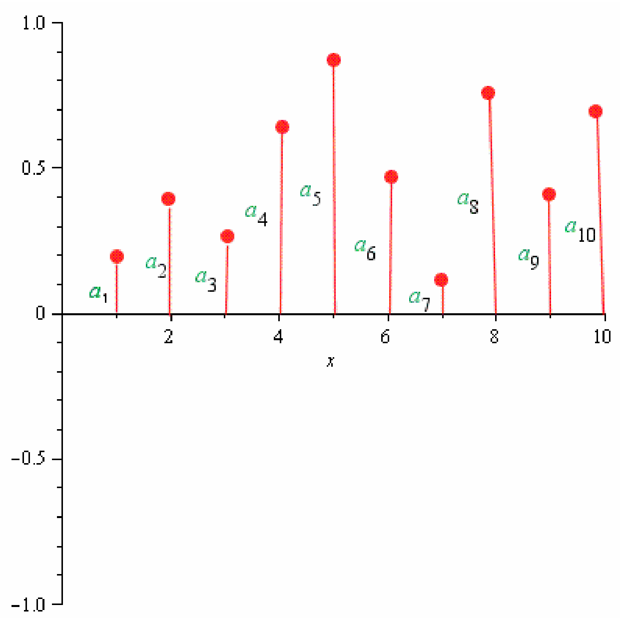
განვიხილოთ რაიმე f ფუნქცია $f:N\to A$. ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შევუსაბამოთ რაიმე x რიცხვი A სიმრავლიდან და იგი x_n-ით აღვნიშნოთ. მაშინ მივიღებთ ერთობლიობას:

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

რიცხვთა ამ ერთობლიობას **რიცხვითი მიმდევრობა** ეწოდება. x_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, x_2-ს – მიმდევრობის მეორე წევრი და ა.შ. x_n-ს ეწოდება მიმდევრობის n-ური წევრი. x_n-ს უწოდებენ აგრეთვე მოცემული მიმდევრობის ზოგად წევრს.

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$ მიმდევრობას მოკლედ აღვნიშნავთ $(x_n)_{n\geq 1}$ სიმბოლოთი.

$(x_n)_{n\geq 1}$ რიცხვით მიმდევრობას, როგორც ნატურალური არგუმენტის ფუნქციას, შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:



განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობის რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 6. 1. ვთქვათ, მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით

$$x_n = 3n+1.$$

მაშინ გვექნება

$$x_1 = 4, x_2 = 7, x_3 = 10, ..., x_n = 3n+1$$

ე.ი. გვაქვს შემდეგი მიმდევრობა: $4, 7, 10, ..., 3n+1, ...$

მაგალითი 6. 2. ვთქვათ მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

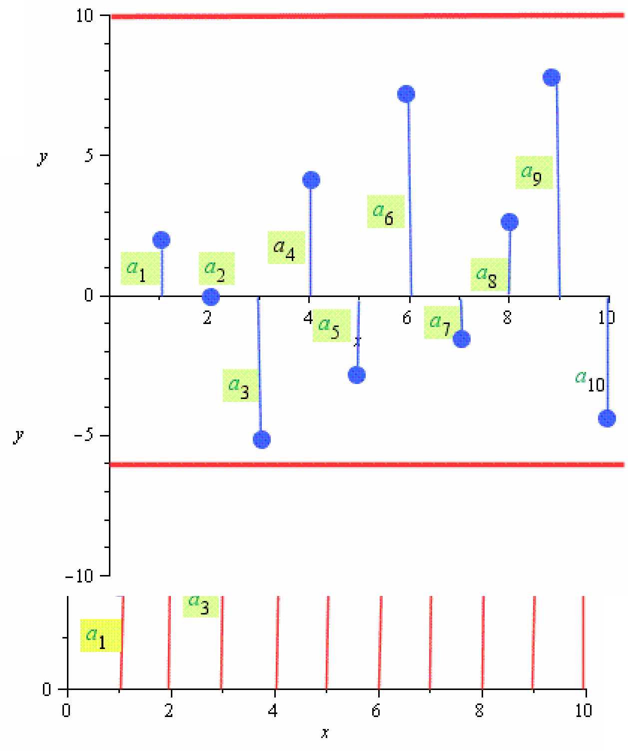
მაშინ გვექნება

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, ...$$

ე. ი. გვაქვს შემდეგი მიმდევრობა: $0, 1, 0, 1, ..., \frac{1+(-1)^n}{2}, ...$

$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება **ზემოდან შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი b რიცხვი, რომ $x_n < b$ ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის.

ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობის გეომეტრიული სურათი შემდეგია:



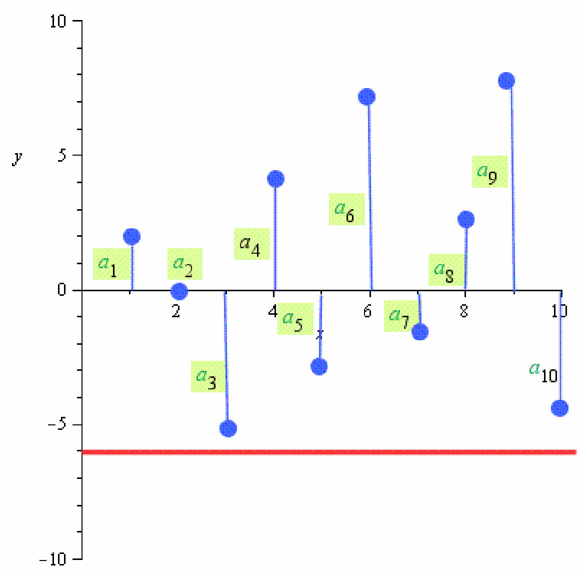
მაგალითი 6. 3. განვიხილოთ მიმდევრობა $(x_n)_{n\geq 1}$, სადაც $x_n = -n$

$$-1,-2,\ldots,-n,\ldots$$

ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი ნაკლებია 0-ზე, ამიტომ ეს მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.

$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება **ქვემოდან შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი a რიცხვი, რომ $x_n > a$ ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის.

ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობის გეომეტრიული სურათი შემდეგია:



მაგალითი 6. 4. განვიხილოთ მიმდევრობა $(x_n)_{n\geq 1}$, სადაც $x_n = n$

$$1,2,\ldots,n,\ldots$$

ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი მეტია 0-ზე, ამიტომ ეს მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.

თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, მაშინ მას შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.

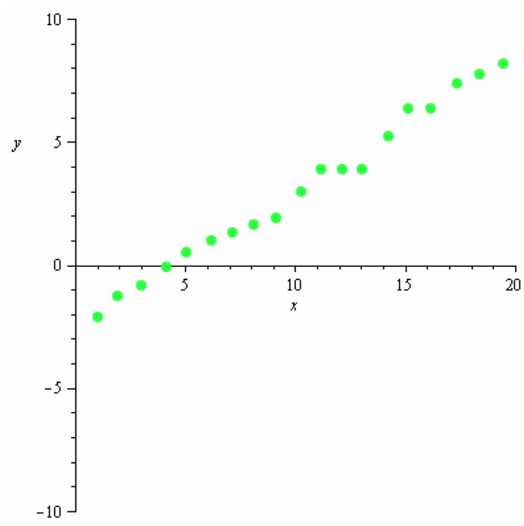
შემოსაზღვრული მიმდევრობის გეომეტრიული სურათი შემდეგია:

მაგალითი 6. 5. განვიხილოთ მიმდევრობა $(x_n)_{n\geq 1}$, სადაც $x_n = \dfrac{1}{n}$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი მეტია 0-ზე და ნაკლებია 2-ზე, ამიტომ ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრული მიმდევრობაა.

მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$

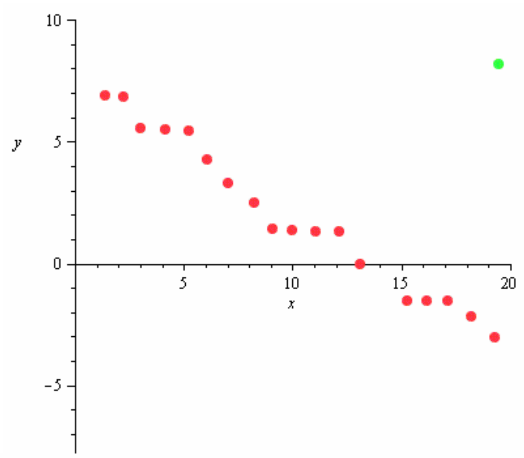


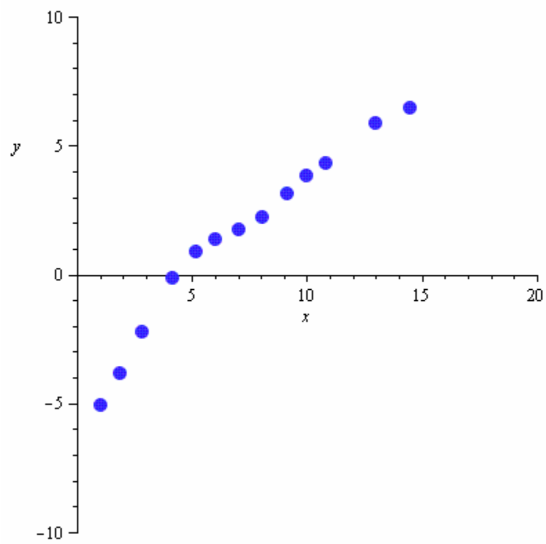
მაგალითი 6. 6. განვიხილოთ მიმდევრობა

$$1,2,3,3,4,5,6,6,\ldots$$

ეს მიმდევრობა ზრდადი მიმდევრობაა.

მიმდევრობას ეწოდება კლებადი, თუ $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$





მაგალითი 6. 7. განვიხილოთ მიმდევრობა

$$-1,-2,-3,-3,-4,-5,-6,-6,\ldots$$

ეს მიმდევრობა კლებადი მიმდევრობაა.

მიმდევრობას ეწოდება მკაცრად ზრდადი, თუ $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

მაგალითი 6. 8. განვიხილოთ მიმდევრობა

$$1,2,3,4,5,6,...$$

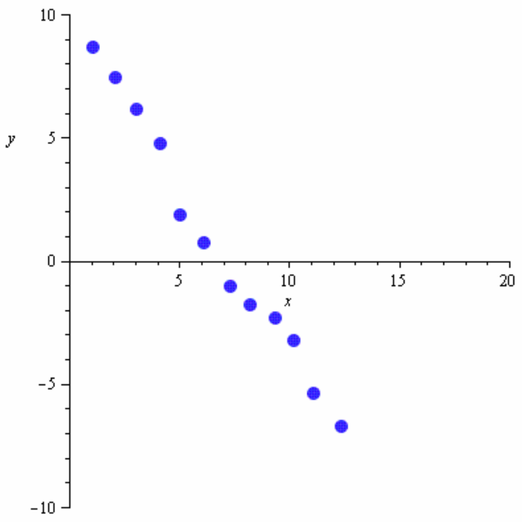
ეს მიმდევრობა მკაცრად ზრდადი მიმდევრობაა.

მიმდევრობას ეწოდება მკაცრად კლებადი, თუ $x_1 > x_2 > ... > x_n, > ...$

მაგალითი 6. 9. განვიხილოთ მიმდევრობა

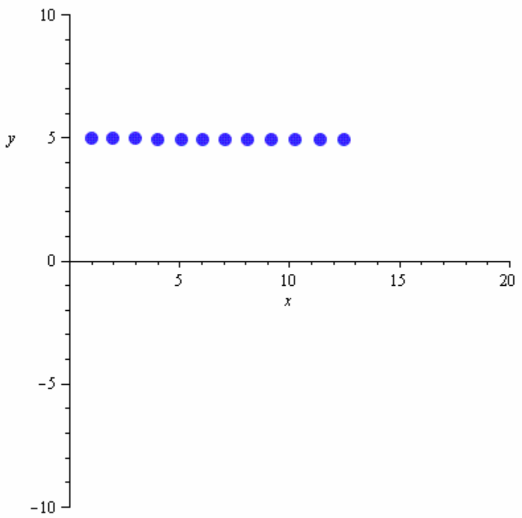
$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}...,\frac{1}{n},...$$

ეს მიმდევრობა მკაცრად კლებადი მიმდევრობაა.



ყოველ ზრდად (მკაცრად ზრდად) ან კლებად (მკაცრად კლებად) მიმდევრობას მონოტონური მიმდევრობა ეწოდება.

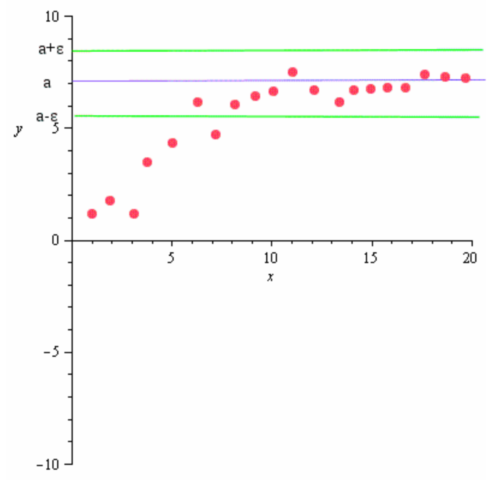
$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას, სადაც $x_n = a$ ყოველი n ნატურალური რიცხვისთვის, მუდმივი მიმდევრობა ეწოდება.



მიმდევრობის ზღვარი

განსაზღვრება 6. 1. ვიტყვით, რომ $(x_n)_{x\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის a რიცხვი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ როცა $n > N$, გვექნება $|x_n - a| < \varepsilon$.

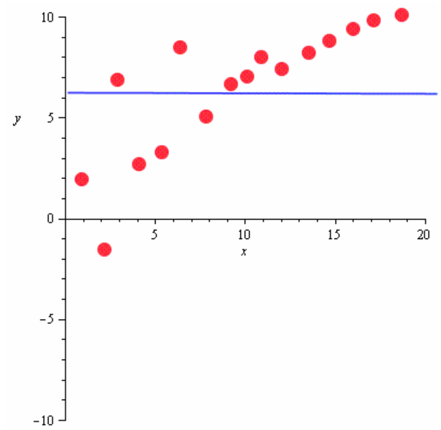
ის ფაქტი, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის a რიცხვი ჩაიწერება ასე: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.



მიმდევრობის ზღვრის ცნებას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი გეომეტრიული ახსნა:

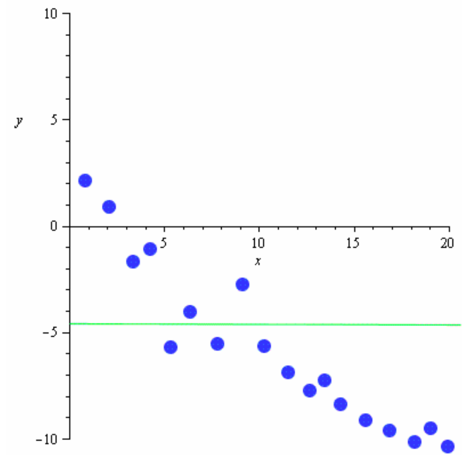
a არის x_n მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ მიმდევრობის ყოველი x_n წევრი, რომლის ნომერი $n > N$, მოთავსდება $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ შუალედში:

განსაზღვრება 6. 2. ა) ვიტყვით, რომ $(x_n)_{x\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის $+\infty$, თუ ყოველი დადებითი M რიცხვისთვის, მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ როცა $n > N$, გვექნება $x_n > M$.



ის ფაქტი, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის $+\infty$, ჩაიწერება ასე: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

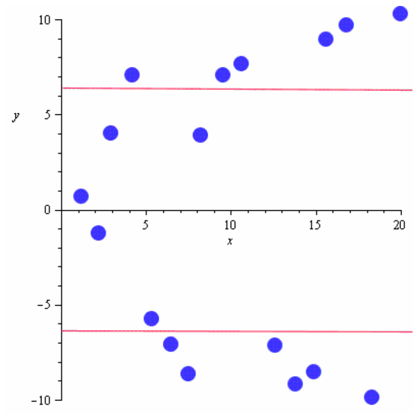
ბ) ვიტყვით, რომ $(x_n)_{x\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის $-\infty$, თუ ყოველი დადებითი M რიცხვისთვის, მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ როცა $n > N$ გვექნება $x_n < -M$.



ის ფაქტი, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის $-\infty$, ჩაიწერება ასე: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

M ,

გ) ვიტყვით, რომ $(x_n)_{x\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის ∞, თუ ყოველი დადებითი M რიცხვისთვის, მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ როცა $n > N$, გვექნება $|x_n| > M$.



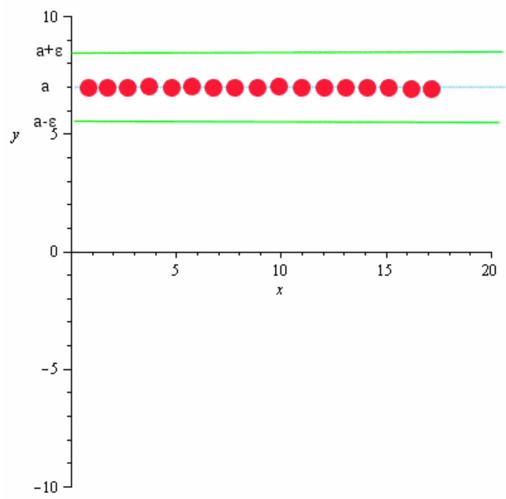
ის ფაქტი, რომ $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის ∞, ჩაიწერება ასე: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

განსაზღვრება 6. 3. რიცხვთა $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობას ეწოდება **კრებადი**, თუ მას აქვს სასრული ზღვარი. მიმდევრობას, რომელსაც ზღვარი არა აქვს, ან მისი ზღვარი არის რომელიმე სახის უსასრულობა, **განშლადი** მიმდევრობა ეწოდება.

თუ $(x_n)_{n\ge1}$ კრებადია და მისი ზღვარია a რიცხვი, ამბობენ რომ $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისკენ.

მაგალითი 6. 10. ყოველი მუდმივი $a,a,\dots,a,\dots$ მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარია a რიცხვი.

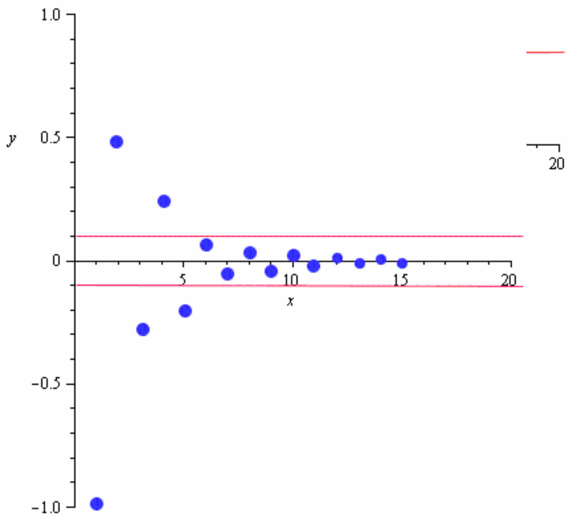
მართლაც, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ მიდამო შეიცავს a რიცხვს. ამიტომ ასეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის N რიცხვად გამოდგება ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. ჩვენი შემთხვევისთვის $x_n = a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ყოველი n – თვის. ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a.$



მაგალითი 6. 11. განვიხილოთ $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\ge1}$ მიმდევრობა. (ე.ი. მიმდევრობა: $1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$). ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარი 0-ის ტოლია. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და მოვძებნოთ ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$. (ასეთი ნატურალური რიცხვი მოიძებნება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოდან არაშემოსაზღვრულობის გამო). ახლა, ცხადია, რომ თუ $n > N$, გვექნება

$|x_n - a| = |x_n| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ ე.ი.

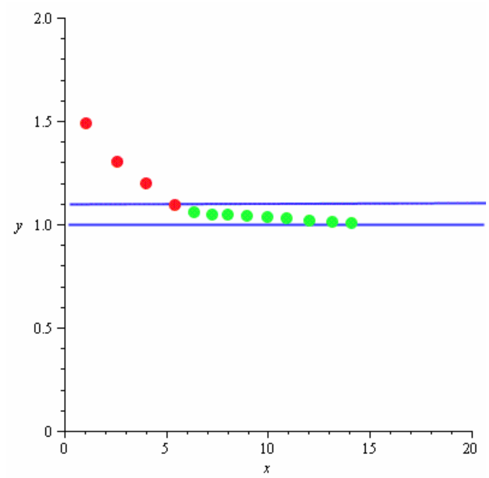
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$



მაგალითი 6. 12.

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$, ვინაიდან $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, როცა $n>N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, ვინაიდან $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, როცა $n>N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

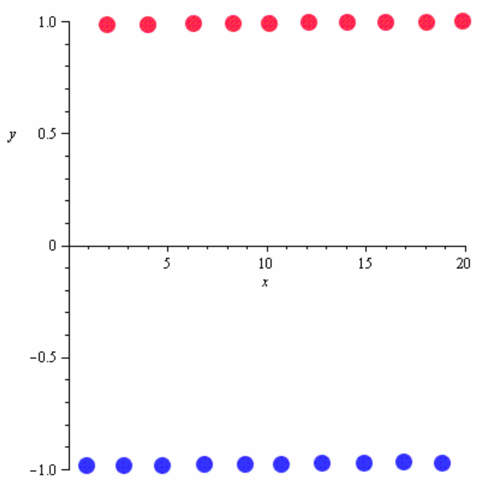


გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$, ვინაიდან $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, როცა $n>N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{q^n}=0$ როცა $|q|>1$. მართლაც, $\left|\dfrac{1}{q^n}-0\right|=\dfrac{1}{|q|^n}<\varepsilon$, როცა

$n>N=\left[\log_{|q|}\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

7) ვთქვათ, $(x_n)_{n\ge1}, x_n=(-1)^n$. ვაჩვენოთ, რომ $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობას არა აქვს ზღვარი. -1,1,-1,1,..
დავუშვათ, რომ ამ მიმდევრობის ზღვარი არის რაიმე a რიცხვი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ $|x_n-a|<\varepsilon$, როცა $n>N$.



ავიღოთ $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$. $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$-თვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ $|x_n-a|<\dfrac{1}{2}$, როცა $n>N$.

რადგანაც x_n თანმიმდევრულად ღებულობს -1 და 1 მნიშვნელობებს, ამიტომ უნდა იყოს

$$|1-a|<\frac{1}{2} \text{ და } |-1-a|<\frac{1}{2}.$$

მაშინ გვექნება $2=|(1-a)-(-1-a)|\le|1-a|+|-1-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. ე.ი. 2<1, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემულ მიმდევრობას ზღვარი არა აქვს.

მოვიყვანოთ აღნიშნული ფაქტის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:

8) $\lim_{n\to\infty} n^2=+\infty$, ვინაიდან $n^2>M$, როცა $n>N=[\sqrt{M}]+1$.

9) $\lim_{n\to\infty}(-n^3)=-\infty$, ვინაიდან $-n^3<-M$, როცა $n>N=[\sqrt[3]{M}]+1$.

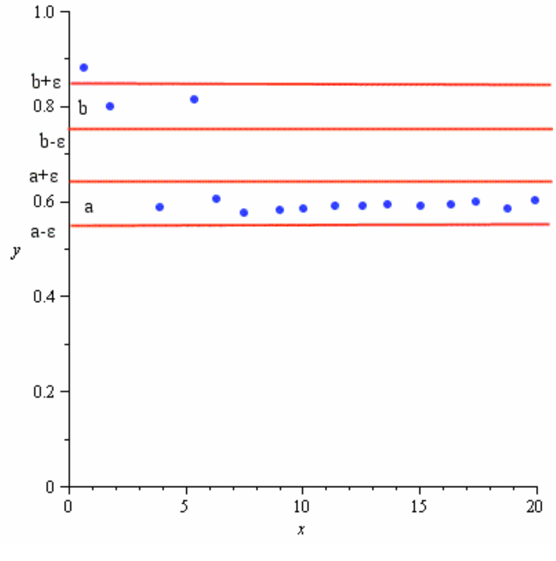
10) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n=\infty$, ვინაიდან $|(-1)^n n|>M$, როცა $n>N=[M]$

თეორემა 6. 1. ყოველ კრებად მიმდევრობას აქვს ერთადერთი ზღვარი.

დამტკიცება. მოვიყვანოთ დამტკიცების გეომეტრიული ვარიანტი: ვთქვათ, $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ. ავიღოთ a რიცხვისგან განსხვავებული რაიმე b რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ b არ შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის ზღვარი.

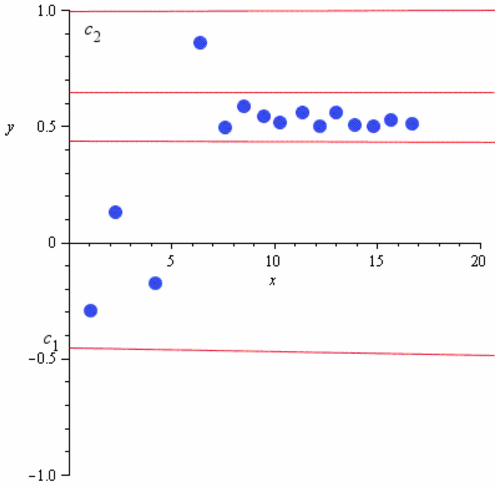
ვთქვათ, $\varepsilon\in(0,\frac{b-a}{2})$, $b>a$.

მაშინ, როგორც ნახაზიდან ჩანს, როცა $n>N$, $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის წევრები ჩავარდებიან a რიცხვის $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ მიდამოში. ამიტომ მიმდევრობის რომელიღაც ნომრიდან დაწყებული ვერცერთი წევრი ვერ ჩავარდება b რიცხვის $(b-\varepsilon ,b+\varepsilon)$ მიდამოში.



თეორემა 6. 2. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. მაშინ $\varepsilon=1$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი N რიცხვი, რომ როცა $n>N$, მაშინ $|x_n-a|<1$.



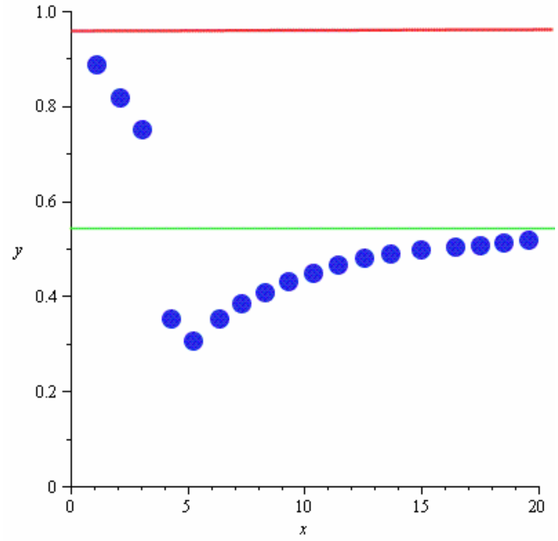
როგორც ნახაზზე ჩანს , მითითებული ზოლის გარეთ რჩება $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის მხოლოდ სასრული რაოდენობის წევრები, ამიტომ არსებობს ისეთი c_1 და c_2 რიცხვები, რომ შესრულდება $c_1<x_n<c_2$ უტოლობა ყველა n-

თვის, მაშასადამე $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

შენიშვნა 6. 1. არსებობს ისეთი მიმდევრობები, რომლებიც შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა კრებადი. მაგ.: $(x_n)_{n\ge1}, x_n=(-1)^{n}$. როგორც ვიცით, ეს მიმდევრობა არაა კრებადი, მაგრამ იგი შემოსაზღვრულია.

ე.ი. მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მისი კრებადობა.

თეორემა 6. 3. ვთქვათ, $(x_n)_{n\ge1}$ ზრდადი მიმდევრობაა, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან. მაშინ ეს მიმდევრობა კრებადია.

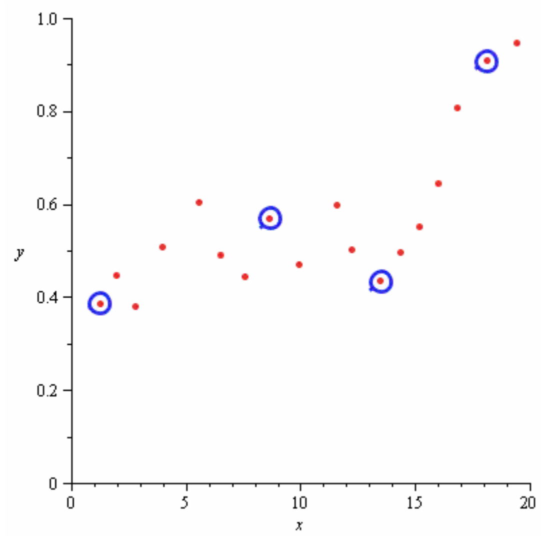


თეორემა 6. 4. ვთქვათ, $(x_n)_{n\ge1}$ კლებადი მიმდევრობაა, რომელიც შემოსაზღვრულია ქვემოდან. მაშინ ეს მიმდევრობა კრებადია.

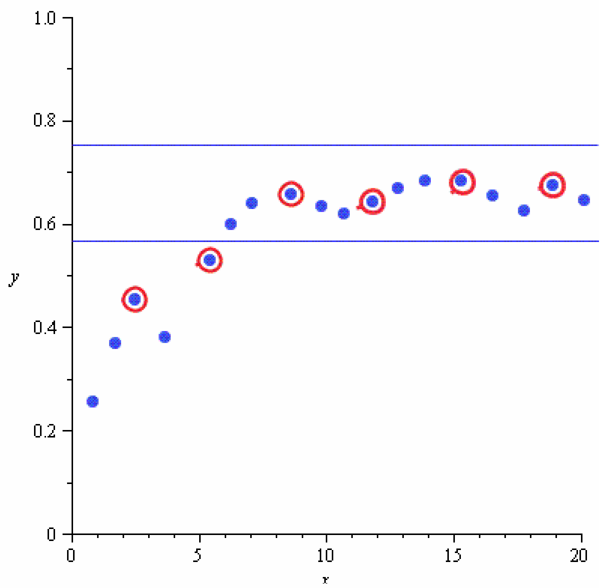
მაგალითი 6. 12. მოცემულია $(x_n)_{n\ge1}, x_n=1-\frac{1}{n}$ მიმდევრობა x_n ზრდადი მიმდევრობაა და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1$.

მაგალითი 6. 13. მოცემულია $(x_n)_{n\ge1}, x_n=1+\frac{1}{n}$ მიმდევრობა x_n კლებადი მიმდევრობაა და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$.

განსაზღვრება 6. 4. ვთქვათ მოცემულია $(x_n)_{n\ge1.}$ მიმდევრობა. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა $n_1<n_2<n_3<\ldots<n_k<\ldots$ მიმდევრობას $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ ეწოდება $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა და აღინიშნება ასე: $(x_{n_k})_{k\ge1.}$



თეორემა 6. 5. თუ $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისკენ, მაშინ ამ მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა კრებადია იმავე a რიცხვისკენ.



დამტკიცება. ვთქვათ, $\lim x_n = a$. ამიტომ განმარტების ძალით $\forall \varepsilon > 0$-თვის არსებობს ისეთი N რიცხვი, რომ როცა $n > N$, მაშინ $|x_n - a| < \varepsilon$.

ახლა განვიხილოთ ქვემიმდევრობა $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ ავიღოთ ისეთი m რიცხვი, რომ $n_m > N$,

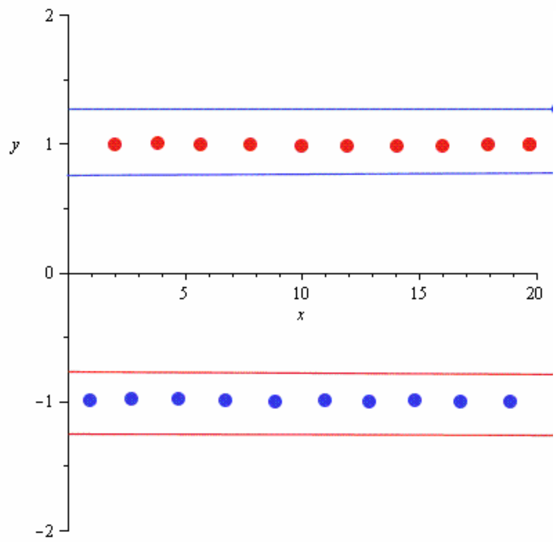
მაშინ , $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, როცა $k > m$.

ე.ი. $(x_{n_k})_{k\geq1}$ მიმდევრობის ზღვარია იგივე a რიცხვი.

მაგალითი 6. 14. ვთქვათ $(x_n)_{n\geq1}, x_n = (-1)^n$ განვიხილოთ ამ მიმდევრობის შემდეგი ორი ქვემიმდევრობა:

-1,-1, ..,-1,.. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1) = -1$

1,1, ..,1, .. $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$



$(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობას ზღვარი რომ ჰქონდეს, მაშინ მის ნებისმიერ ქვემიმდევრობას უნდა ჰქონდეს იგივე ზღვარი. მაგრამ ჩვენ ავიღეთ $(x_n)_{n\geq1} = ((-1)^n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის ორი ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელთაც სხვადასხვა ზღვარი აქვთ. ე.ი. $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობას ზღვარი არა აქვს.

თეორემა 6. 6. ვთქვათ, $(x_n)_{n\geq 1}$ და $(y_n)_{n\geq 1}$ ორი მიმდევრობაა და $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$. მაშინ მართებულია ტოლობები:

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{\leftarrow\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = a - b$
3. $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n = ab$
4. თუ $b \neq 0$, მაშინ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$
5. თუ გვაქვს მუდმივი მიმდევრობა $(a)_{n\geq 1}$, მაშინ $\lim_{n\to\infty} a = a.$
6. თუ α რაიმე რიცხვია, მაშინ $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$.

თეორემა 6. 7. ვთქვათ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ და $a_n = f(n)$. მაშინ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

მაგალითი 6.15. გამოთვალეთ ზღვარი $\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

განსაზღვრება 6. 5. რიცხვთა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა, თუ ამ მიმდევრობის ზღვარი ნულის ტოლია.

მაგალითი 6. 16. $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = \frac{1}{n}. \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ ე.ი. $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

რიცხვთა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ დიდი, თუ მისი ზღვარი არის რომელიმე სახის უსასრულობა.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 6. 8. თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა და $x_n \neq 0 \quad (n \in N)$, მაშინ $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, და პირიქით: თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა, $x_n \neq 0 \quad (n \in N)$, მაშინ $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა.

ვთქვათ, $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$ ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა. ამბობენ, რომ $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$ ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=1$ და წერენ: $(x_n)_{n\geq1} \approx (y_n)_{n\geq1}$

ვთქვათ, $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$ ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა. თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=1$, მაშინ $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობებს ეკვივალენტური უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები ეწოდება.

მაგალითები 1. $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to}\frac{1}{n}=0$

$(y_n)_{n\geq1}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{1+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

ე.ი. $(x_n)_{n\geq1} \approx (y_n)_{n\geq1}$

2. $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=n^2+1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)=+\infty$

$(y_n)_{n\geq1}$, $y_n=n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$$

ე.ი. $(x_n)_{n\geq1} \approx (y_n)_{n\geq1}$

ზოგიერთი მიმდევრობის ზღვარი:

1. $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=\sqrt[n]{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2. $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx2{,}7$ – ნეპერის რიცხვი

3. $x_n=(q)^n$, $q>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=+\infty$

4. $x_n=q^n$, $0<q<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

დამტკიცება. რადგანაც $\log x_n=\frac{\log n}{n}$ და $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, ამიტომ თეორემა 6. 7-ის ძალით $\lim\limits_{n\to\infty}\log x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$. თუ გამოვიყენებთ ლოგარითმული ფუნქციის უწყვეტობას, მივიღებთ $\log\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

ანალოგიურად დამტკიცდება დანარჩენი ტოლობების სამართლიანობა (დაამტკიცეთ!).

სავარჯიშოები

1. მიმდევრობის ზღვრის განმარტების ძალით აჩვენეთ, რომ

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$; დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{2}{n^2}\right)=2$.

2. გამოთვალეთ:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+4n-1}{n^6-7n+2}$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+1}$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}\right)$; დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$.

3. აჩვენეთ, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას, სადაც $x_n=1+(-1)^n$ არა აქვს ზღვარი

რიცხვითი მწკრივები. ვთქვათ, $(x_n)_{n\geq 1}$ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობაა. ჩვენი სურვილია აზრი მივანიჭოთ ამ მიმდევრობის ყველა წევრის ჯამს.

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots \qquad (6.\ 1)$$

ამასთან, ეს ჯამი ისე უნდა იყოს განმარტებული, რომ, როცა ყველა x_n, თუ $n\geq N+1$, ნულის ტოლია, (6. 1) გვაძლევდეს $x_1+x_2+\ldots+x_N$ ჯამს.

(6. 1) სახის ჯამს ჩვენ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ წევრებიან მწკრივს ვუწოდებთ. x_1 ამ მწკრივის პირველი წევრია, x_2 მეორე წევრი, x_n-ს მწკრივის n-ურ წევრს უწოდებენ.

განვიხილოთ (6.1) მწკრივის ე. წ. კერძო ჯამები

$$S_1 = x_1$$
$$S_2 = x_1 + x_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$\vdots$$

ყოველ $n\,(n \in N)$ რიცხვს შეესაბამება (6. 1) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი S_n. ამგვარად, მიიღება (6. 1) მწკრივის შესაბამისი n-ური კერძო ჯამების $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა.

ამბობენ, რომ (6. 1) მწკრივი კრებადია და S არის მისი ჯამი, თუ კრებადია მისი კერძო ჯამების $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა და $\lim S_n = S$. ასეთ შემთხვევაში წერენ

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

იმ შემთხვევაში, როცა $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა განშლადია, (6. 1) მწკრივს განშლადი მწკრივი ეწოდება.

თეორემა 6. 9. თუ (6. 1) მწკრივი კრებადია, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ მწკრივის $(S_n)_{n\geq 1}$ კერძო ჯამთა მიმდევრობა კრებადია. მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითები 6. 17. განვიხილოთ მწკრივი

$$a + a + \ldots + a + \ldots$$

თუ $a = 0$, მაშინ ყოველი n-თვის $S_n = 0$ და $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. ამ შემთხვევაში მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი $S = 0$. როცა $a \neq 0$, პირობა $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ არაა შესრულებული და ამიტომ თეორემა (6. 9)-ის ძალით, ეს მწკრივი განშლადია.

მაგალითები 6. 18. განვიხილოთ მწკრივი, რომლისთვისაც $x_n = (-1)^n$. მას ასეთი სახე აქვს:

$$(-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^n + \cdots +$$

აქ პირობა $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ არაა შესრულებული და ამიტომ მწკრივი განშლადია.

მაგალითები 6. 19. განვიხილოთ რაიმე a და q რიცხვები $(a \neq 0)$ და შევადგინოთ მწკრივი

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \qquad (6.\ 2)$$

ე.ი. აქ $x_n = aq^{n-1}$.

თუ $|q| \geq 1$, მაშინ $|x_n| = |aq^{n-1}| = |a||q|^{n-1} \geq |a| > 0$, ნებისმიერი $n \in N$-სთვის. ამიტომ პირობა $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ არაა შესრულებული, რაც ამტკიცებს, რომ (2) მწკრივი განშლადია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $|q| < 1$. მაშინ

$$S_n = a + aq + ... + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a}{q-1}q^n - \frac{a}{q-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{q-1}q^n - \frac{a}{q-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{q-1}q^n - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{q-1} = \frac{a}{q-1}\lim_{n\to\infty} q^n - \frac{a}{q-1} = 0 - \frac{a}{q-1} = \frac{a}{1-q}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ (6. 2) მწკრივი კრებადია და

$$a + aq + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q} \qquad (|q| < 1)$$

მაგალითები 6. 20 განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

ამ მწკრივს ჰარმონიული მწკრივი ეწოდება.

განვიხილოთ $S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^k}$.

დავაჯგუფოთ ეს შესაკრებები შემდეგნაირად:

$$S_{2^k} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + ... + \frac{1}{2^k})$$

S_{2^k} ჯამში k სხვადასხვა ფრჩხილია. ყოველ მათგანს აქვს სახე:

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + ... + \frac{1}{2^m} = \sum_{i=1}^{2^{m-1}}\frac{1}{2^{m-1}+i} \qquad (m = 1,2,,...,k).$$ მაგრამ

$$\sum_{i=1}^{2^{m-1}}\frac{1}{2^{m-1}+i} \ge \sum_{i=1}^{2^{m-1}}\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}} = \sum_{i=1}^{2^{m-1}}\frac{1}{2^m} = \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}$$

ე.ი. $S_{2^k} \ge 1 + \frac{k}{2}$

ვთქვათ, ახლა, რომ A ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ავიღოთ ისეთი ნატურალური k რიცხვი, რომ $k > 2(A-1)$. მაშინ $S_{2^k} > A$. ე.ი. $(S_n)_{n\ge1}$ არაა ზემოდან შემოსაზღვრული.

ამგვარად, ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

მაგალითები 6. 21. გამოთვალეთ უსასრულო ჯამი

$$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

ავიღოთ $S_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2-1}{1\cdot2} + \frac{3-2}{2\cdot3} + ... + \frac{n+1-n}{n(n+1)} =$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. მაშინ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$.

ამრიგად, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...=1.$

განსაზღვრება 6. 6. ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი. განვიხილოთ მწკრივი

$x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+...=\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$. ამ მწკრივს უწოდებენ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივის n-ურ ნაშთს.

შენიშვნა. ვთქვათ, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია S. მაშინ

$S=\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = S_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$. აქედან $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = S - S_n$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S-S_n) = S - S = 0.$$

აბსოლუტურად და პირობითად კრებადი მწკრივები . განვიხილოთ მწკრივი

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + ... \qquad (6.\ 3)$$

და შევადგინოთ მწკრივი

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| + ... \qquad (6.\ 4)$$

(6. 3) მწკრივს აბსოლუტურად კრებადი ეწოდება, თუ კრებადია (6. 4) მწკრივი. თუ (6. 3) მწკრივი კრებადია, ხოლო (6. 4) განშლადია, მაშინ (6. 3) მწკრივს პირობით კრებადი მწკრივი ეწოდება.

მაგალითი 6. 22. განვიხილოთ მწკრივი $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+...$. მისი კერძო ჯამია ან $\frac{1}{n}$ ან 0. ამიტომ კერძო ჯამთა მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ, მაშასადამე მწკრივიც კრებადია ნულისკენ. მეორე მხრივ, მწკრივის წევრების მოდულებისაგან შედგენილი მწკრივია $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+...$, რომელიც განშლადია, ე. ი. მოცემული მწკრივი არ არის აბსოლუტურად კრებადი, მაგრამ იგი არის პირობით კრებადი.

ვიტყვით, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \qquad (6.\ 5)$$

მწკრივი წარმოადგენს (6. 3) მწკრივის მაჟორანტს (მაჟორანტულ მწკრივს), თუ მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ, როცა $n \geq N$, მაშინ $|x_n| \leq \alpha_n$.

თეორემა 6. 10 (მწკრივთა შედარების ნიშანი). თუ (6. 3) მწკრივს გააჩნია კრებადი (6. 5) სახის მაჟორანტი, მაშინ (6. 3) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

მაგალითი 6. 23. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$. ვინაიდან $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ მწკრივი კრებადია (როგორც ზემოთ განხილული მაგალითი 6.21-დან ჩანს), ამიტომ შედარების თეორემით $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ მწკრივი კრებადია. მტკიცდება, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

მაგალითი 6. 24. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. ეს მწკრივი შედარების თეორემით აბსოლუტურად კრებადია, ვინაიდან $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ მწკრივი კი კრებადია.

მაგალითი 6. 25. ვთქვათ, მოცემულია მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. მტკიცდება, რომ როცა $p>1$, მაშინ მწკრივი კრებადია, ხოლო როცა $p\le 1$, მაშინ განშლადია.

თეორემა 6. 11 (მწკრივის აბსოლუტური კრებადობის დალამბერის საკმარისი ნიშანი).

ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი და $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=q$. მაშინ სამართლიანია:

ა) თუ $q<1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

ბ) თუ $q>1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი განშლადია.

გ) თუ $q=1$, მაშინ არსებობს შესაბამისად როგორც აბსოლუტურად კრებადი, ისე განშლადი მწკრივი.

მაგალითი 6. 26. კრებადია თუ არა მწკრივი? 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

1) გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$, ე. ი. მწკრივი კრებადია.

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1$$, ე. ი. მწკრივი განშლადია.

თეორემა 6. 12 (მწკრივის აბსოლუტური კრებადობის კოშის საკმარისი ნიშანი)

ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი და $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=q$. მაშინ სამართლიანია:

ა) თუ $q<1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

ბ) თუ $q>1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი განშლადია.

გ) თუ $q=1$, მაშინ არსებობს შესაბამისი როგორც აბსოლუტურად კრებადი, ისე განშლადი მწკრივი.

მაგალითი 6. 27. გაარკვიეთ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+2}\right)^n$ მწკრივის კრებადობის საკითხი : გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+2}=\frac{1}{4}<1$, ე. ი. მწკრივი კრებადია .

მწკრივს (6. 3) ეწოდება ნიშანცვლადი თუ $x_n x_{n+1}<0$ (როცა $n=1,2,\ldots$). ეს ცხადია, იმას ნიშნავს, რომ მწკრივის ყოველი ორი მეზობელი წევრი სხვადასხვა ნიშნის ნამდვილი რიცხვია. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x_1>0$. აღნიშვნების ერთგვარი შეცვლით (6. 3) მწკრივი ასეთი სახით გადავწეროთ

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{k-1}a_k+\ldots \qquad (6.\ 6)$$

ცხადია, $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ მკაცრად დადებითი რიცხვებია.

თეორემა 6. 13 (ნიშანცვლადი მწკრივის კრებადობის ლეიბნიცის საკმარისი ნიშანი).

თუ ნიშანცვლადი

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-\ldots \qquad (a_n>0,\ n=1,2,\ldots)$$

მწკრივისთვის შესრულებულია პირობები:

1) $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots$

2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$,

მაშინ (6. 6) მწკრივი კრებადია და მისი S ჯამისთვის გვაქვს: $0\le S\le a_1$.

მაგალითი 6. 28. განვიხილოთ შემდეგი ნიშანცვლადი მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

ამ მაგალითისთვის $a_n=\frac{1}{n}$, $(a_n)_{n\ge1}$ კლებადია და $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. ამიტომ ლეიბნიცის ნიშნის თანახმად, ეს მწკრივი კრებადია.

მწკრივის წევრთა მოდულებისგან შედგენილი მწკრივი ჰარმონიული მწკრივია

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

და ის განშლადია. ე.ი. მოცემული მწკრივი პირობითად კრებადი მწკრივის მაგალითია.

სავარჯიშოები

1. მიმდევრობის ზღვრის განმარტების ძალით აჩვენეთ, რომ:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{2}{n^2}\right)=2$

2. გამოთვალეთ:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+4n-1}{n^6-7n+2}$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n^2}}{n^2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 8. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$

3. აქვს თუ არა ზღვარი $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობას, თუ:

1. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ 2. $x_n=(-1)^{n+1}$

3. $x_n=y_n+z_n$, სადაც $y_n=\dfrac{(-1)^n}{2}$ და $z_n=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

4. $x_n=y_nz_n$, სადაც $y_n=(-1)^n$ და $z_n=\dfrac{n+1}{n}$

4. იპოვეთ მწკრივის n-ური კერძო ჯამი და გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი

1. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

2. $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n3^{-n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

5. მწკრივთა შედარების ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის საკითხი:

1. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{3\cdot2^3}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot2^{2n-1}}+\cdots$

2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$

3. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$

6. დალამბერის ან კოშის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა

1. $\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots,$

სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია

2. $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{2^n\cdot n!}{n^n}+\cdots$

3. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\cdots$

4. $\frac{1}{3}+\frac{2^2}{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{3^2}{\left(2+\frac{1}{3}\right)^3}+\cdots+\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}+\cdots$

7. გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა და აბსოლუტურად კრებადობა

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n},$

სადაც x რაიმე რიცხვია და $x\in R\setminus Z$

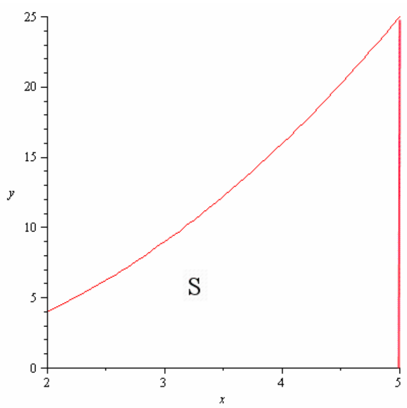
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$

ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი

ვთქვათ მოცემულია [2,5] სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი. S -ით აღვნიშნოთ $x=2, x=5, y=0$ წრფეებით და $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს S რიცხვის პოვნა.



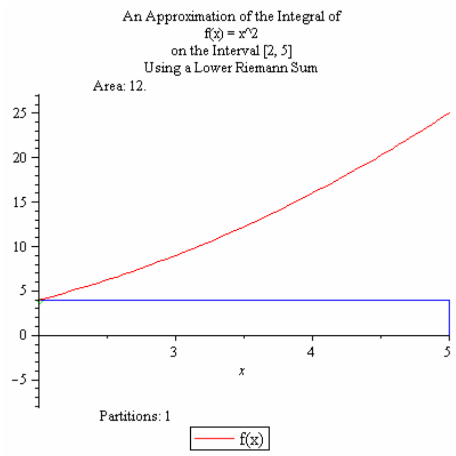
ნაბიჯი 1. ადვილი დასანახია, რომ f ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას აღწევს $x=5$ წერტილში, ხოლო უმცირესს კი- $x=2$ წერტილში. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x_0=2,\ x_1=5$, $P_2=\{x_0,x_1\}$ და

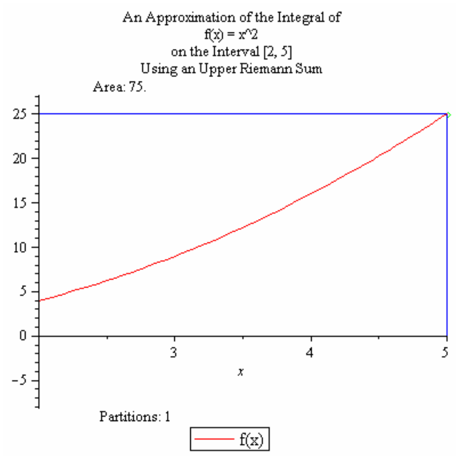
$$L(f,P_2)=f(2)(5-2)=3f(2)$$

$$U(f,P_2)=f(5)(5-2)=3f(5)$$

$with(Student[Calculus1]):$

$RiemannSum(x^2, x=2..5, method=lower, output=plot, partition=1);$





> $with(Student[Calculus1]):$

> $RiemannSum(x^2, x=2..5, method=upper, output=plot, partition=1);$

ადვილი დასანახია, რომ

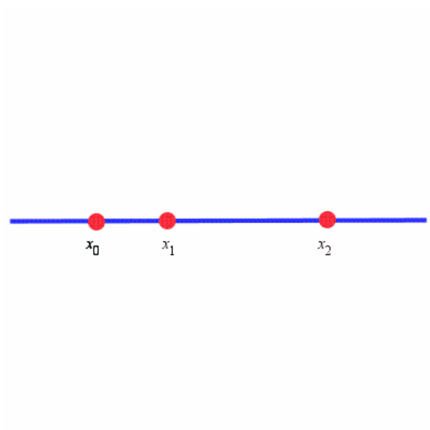
$$L(f,P_2)\le S\le U(f,P_2).$$

ნაბიჯი 2. განვიხილოთ [2,5] სეგმენტის სამი წერტილი ისე, რომ

$$2=x_0<x_1<x_2=5$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$P_3=\{x_0,x_1,x_2\}.$$



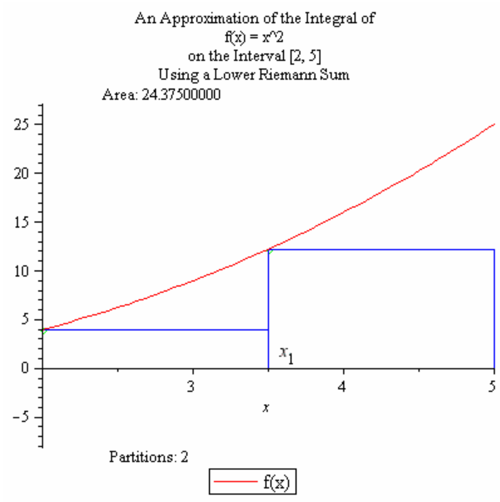
მოცემული სამი წერტილის მეშვეობით [2,5] სეგმენტი დანაწილდება ორ $[x_0,x_1]$ და $[x_1,x_2]$ ქვესეგმენტებად. რადგანაც f ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ არსებობენ რიცხვები: l_1,l_2,u_1,u_2 ისეთი, რომ

$$f(l_1)\le f(x)\le f(u_1),\quad x_0\le x\le x_1$$ >

და

$$f(l_2)\le f(x)\le f(u_2),\quad x_1\le x\le x_2.$$

```
> with(Student[Calculus1]):
RiemannSum(x^2, x = 2..5, method = lower, output = plot, partition = 2);
```



ჩვენს შემთხვევაში $l_1=2, l_2=x_1, u_1=x_1, u_2=5$.

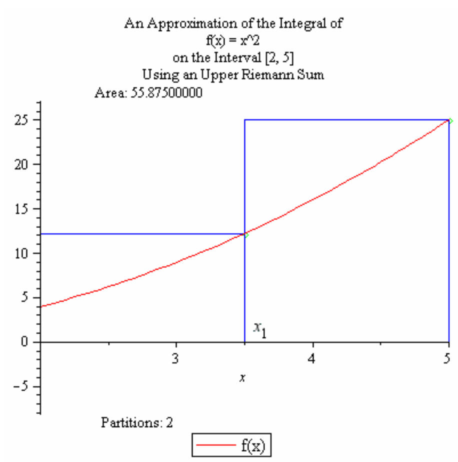
$L(f,P_3)$-ით აღვნიშნოთ ნახაზი 1-ზე მოცემული მართკუთხედების ფართობთა ჯამი, ე. ი.

$$L(f,P_3)=f(l_1)(x_1-x_0)+f(l_2)(x_2-x_1)$$

ნახაზი 1

ვთქვათ

$U(f,P_3)=f(u_1)(x_1-x_0)+f(u_2)(x_2-x_1)$. ნახაზი 2-დან ადვილი დასანახია, რომ $U(f,P_3)$ წარმოადგენს მართკუთხედების ფართობთა ჯამს.




```
> with(Student[Calculus1]):
RiemannSum(x^2, x = 2..5, method = upper, output = plot, partition = 2);
```

ნახაზი 2

ნაბიჯი 3. განვიხილოთ [2,5] სეგმენტის ოთხი წერტილი ისე, რომ

$$2 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 5$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$P_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}.$$

მოცემული ოთხი წერტილის მეშვეობით [2,5] სეგმენტი დანაწილდება სამ $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ და $[x_2, x_3]$ ქვესეგმენტებად. რადგანაც f ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ არსებობენ რიცხვები: $l_1, l_2, l_3, u_1, u_2, u_3$ ისეთი, რომ

$$f(l_1) \le f(x) \le f(u_1), \quad x_0 \le x \le x_1,$$

$$f(l_2) \le f(x) \le f(u_2), \quad x_1 \le x \le x_2$$

და

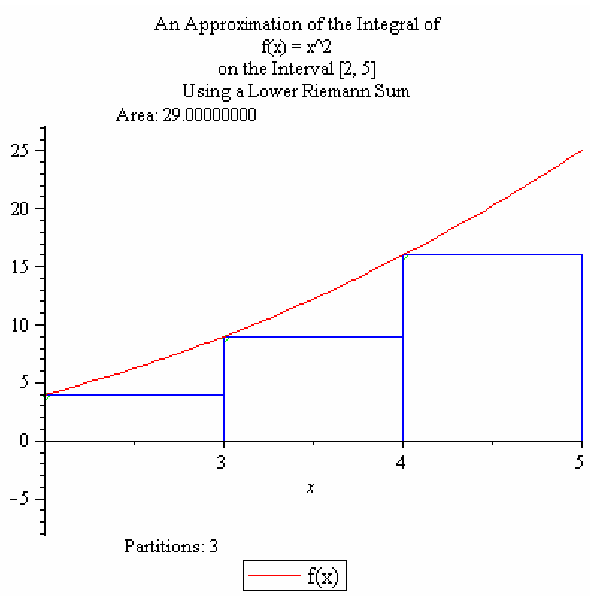
$$f(l_3) \le f(x) \le f(u_3), \quad x_2 \le x \le x_3.$$

$L(f, P_3)$-ით აღვნიშნოთ ნახაზ 3-ზე მოცემული მართკუთხედების ფართობთა ჯამი, ე. ი.

$$L(f, P_4) = f(l_1)(x_1 - x_0) + f(l_2)(x_2 - x_1) + f(l_3)(x_3 - x_2)$$

$with(Student[Calculus1]):$

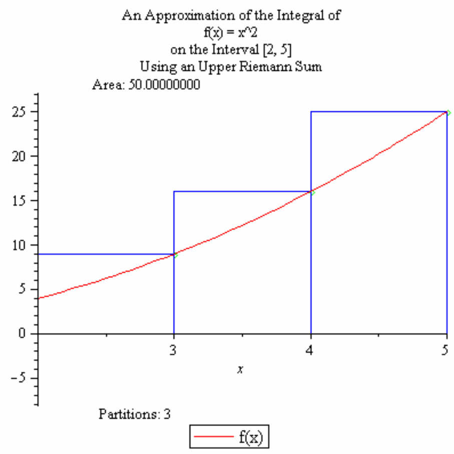
$RiemannSum(x^2, x = 2..5, method = lower, output = plot, p$
$= 3);$



ნახაზი 3

ვთქვათ

$U(f,P_4)=f(u_1)(x_1-x_0)+f(u_2)(x_2-x_1)+f(u_3)(x_3-x_2)$. ნახაზი 4-დან ადვილი დასანახია, რომ $U(f,P_4)$ წარმოადგენს სამი მართკუთხედის ფართობთა ჯამს.



ნახაზი 4

შევნიშნოთ, რომ

$$L(f,P_4)\le S\le U(f,P_4)$$

და თუ

$$P_3\subset P_4$$

მაშინ

$$L(f,P_3)\le L(f,P_4)\le S\le U(f,P_4)\le U(f,P_3).$$

ეს პროცესი შეიძლება გაგრძელდეს უსასრულოდ; კერძოდ, $n+1$ ნაბიჯზე მივიღებთ

$$P_{n+1}=\{x_0,x_1,...,x_n\}$$

$$f(l_i)\le f(x)\le f(u_i),\quad l_i\le x\le u_i, i=1,2,...,n$$

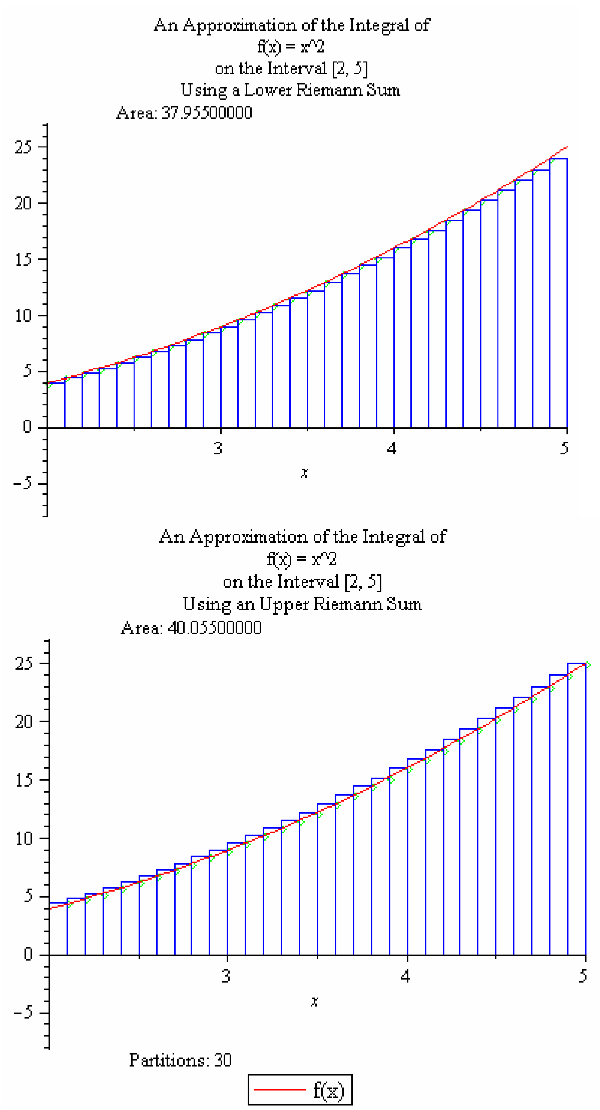
$$L(f,P_{n+1})=f(l_1)(x_1-x_0)+f(l_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(l_n)(x_n-x_{n-1})$$

და

$$U(f,P_{n+1})=f(u_1)(x_1-x_0)+f(u_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(u_n)(x_n-x_{n-1})$$

$with(Student[Calculus1])$:

> $RiemannSum\left(x^2, x = 2..5, method = lower, output = plot, partition = 30\right);$



შევნიშნოთ, რომ

$$L(f, P_{n+1}) \le S \le U(f, P_{n+1})$$

და თუ

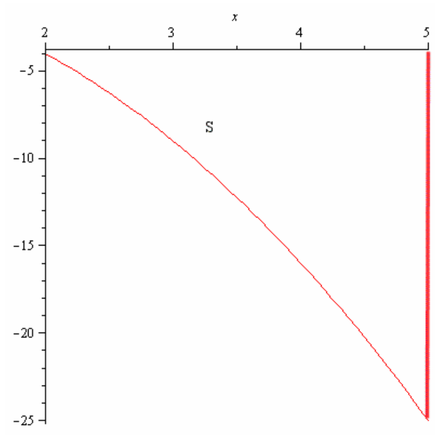
$$P_n \subset P_{n+1}$$

მაშინ

$$L(f, P_n) \le L(f, P_{n+1}) \le S \le U(f, P_{n+1}) \le U(f, P_n).$$

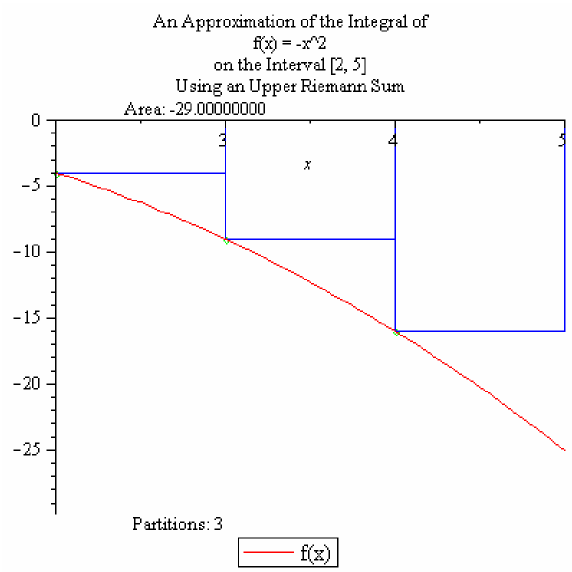
როგორც მსჯელობიდან ჩანს, როცა n მიისწრაფვის უსასრულობისკენ, მაშინ $L(f, P_{n+1})$ და $U(f, P_{n+1})$ მიმდევრობები მიისწრაფვიან S რიცხვისკენ.

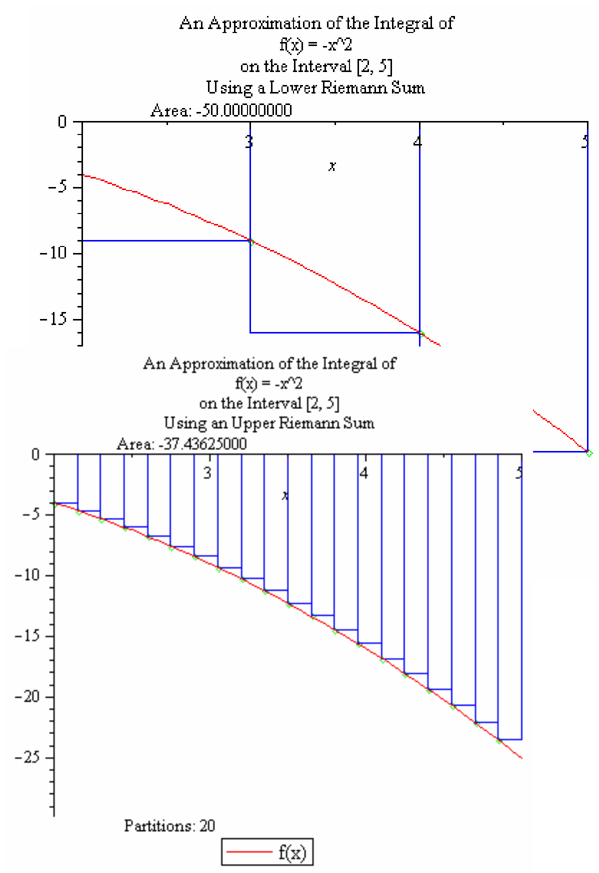
ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ შემთხვევა, როცა f ფუნქცია დადებითია. ვთქვათ, f ფუნქცია თავის განსაზღვრის არეში ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობებს.



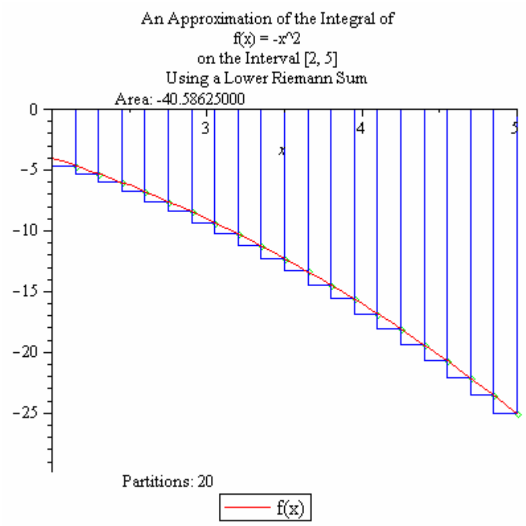
S-ით აღვნიშნოთ $x=2, x=5, y=0$ წრფეებით და $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი. მაშინ ანალოგიური მსჯელობის შედეგად მივიღებთ, რომ

$$L\left(f, P_{n+1}\right) \leq -S \leq U\left(f, P_{n+1}\right).$$





An Approximation of the Integral of
f(x) = -x^2
on the Interval [2, 5]
Using a Lower Riemann Sum
Area: -50.00000000
An Approximation of the Integral of
f(x) = -x^2
on the Interval [2, 5]
Using an Upper Riemann Sum
Area: -37.43625000
Partitions: 20
f(x)

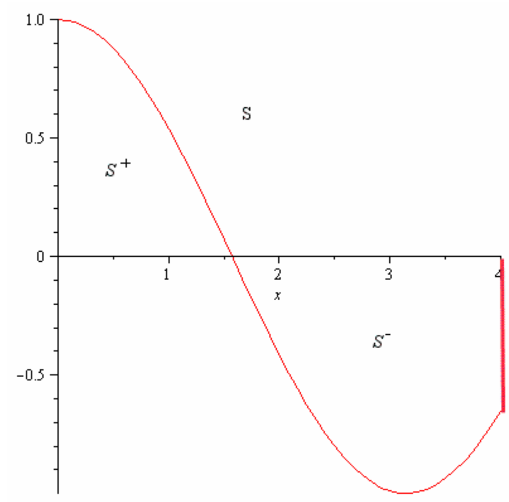


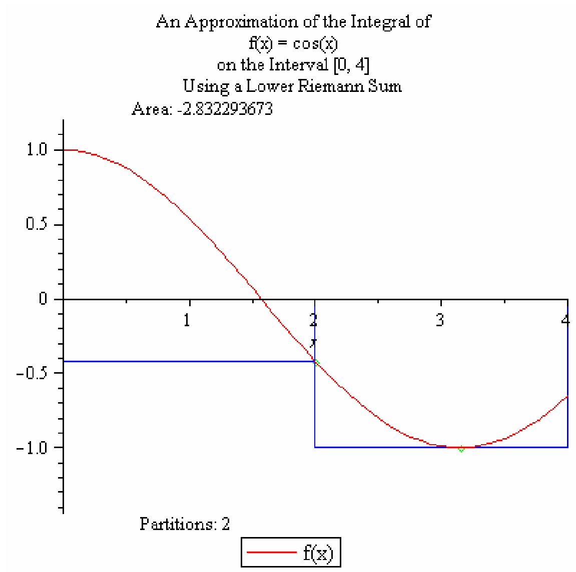
An Approximation of the Integral of
f(x) = -x^2
on the Interval [2, 5]
Using a Lower Riemann Sum
Area: -40.58625000
Partitions: 20
f(x)

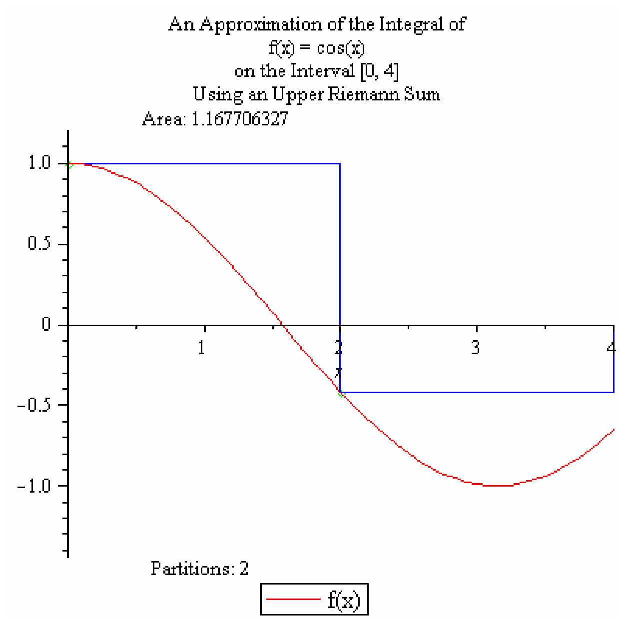
ვთქვათ f ნიშანს არ ინარჩუნებს თავის განსაზღვრის არეში.

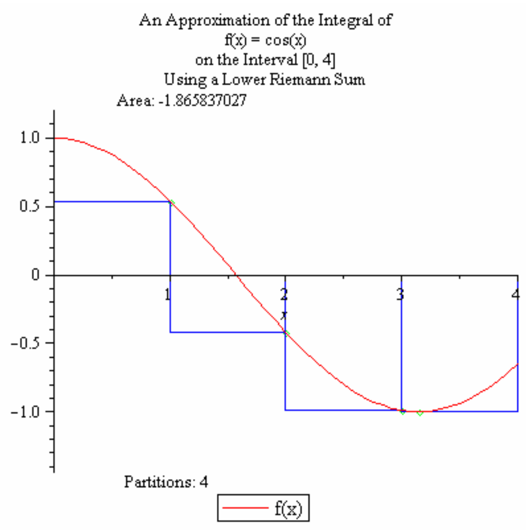
S^+-ით აღვნიშნოთ იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც ox ღერძის ზევითაა, ხოლო S^--ით კი მ ნაწილის ფართობი, რომელიც ox ღერძის ქვევითაა. მაშინ ისე, როგორც ზემოთ, მივიღებთ, რომ

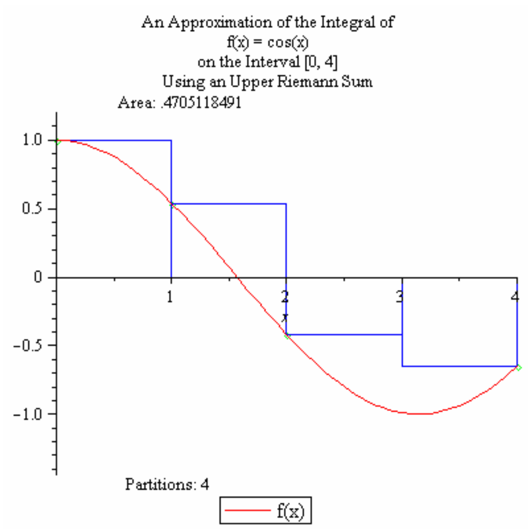
$$L(f, P_{n+1}) \le S^+ - S^- \le U(f, P_{n+1})$$

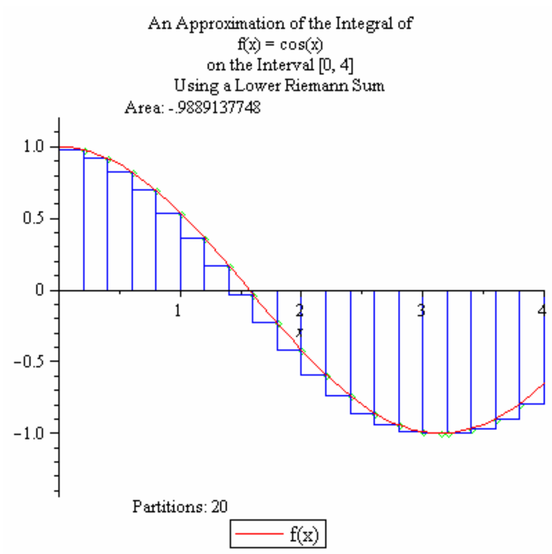


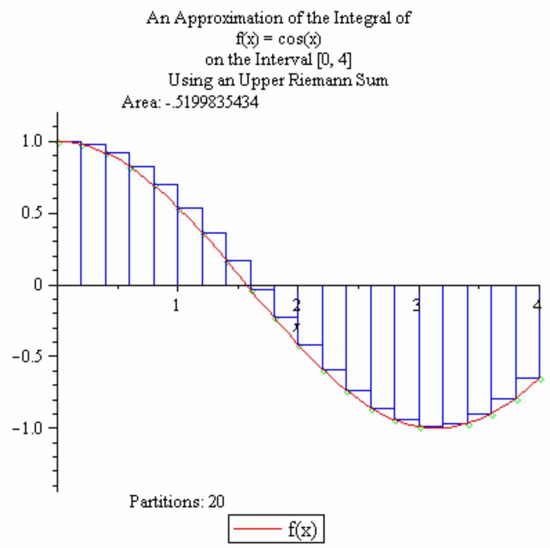





An Approximation of the Integral of
f(x) = cos(x)
on the Interval [0, 4]
Using a Lower Riemann Sum
Area: -1.865837027
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
1
2
3
4
x
Partitions: 4
f(x)


An Approximation of the Integral of
f(x) = cos(x)
on the Interval [0, 4]
Using an Upper Riemann Sum
Area: .4705118491
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
1
2
3
4
x
Partitions: 4
f(x)


An Approximation of the Integral of
f(x) = cos(x)
on the Interval [0, 4]
Using a Lower Riemann Sum
Area: -.9889137748
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
1
2
3
4
x
Partitions: 20
f(x)



დანაწილებები და დარბუს ჯამები. ვთქვათ, f $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის წერტილთა სასრული სიმრავლე

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\},$$

სადაც

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

P-ს ვუწოდებთ $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებას. P დანაწილების წერტილებით $[a,b]$ სეგმენტი დანაწილდება n ქვესეგმენტად, რომლის n-ური სეგმენტი არის $[x_{i-1}, x_i]$. Δx_i-ით აღვნიშნოთ $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტის სიგრძე. ე. ი.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Δx_i სიგრძეებს შორის უდიდესი აღვნიშნოთ $\|P\|$ -თი. ე. ი .

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i.$$

რადგანაც f ფუნქცია უწყვეტია $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს l_i და u_i $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტიდან, ისეთი, რომ

$$f(l_i) \le f(x) \le f(u_i), \quad x_{i-1} \le x \le x_i.$$

განვიხილოთ რამოდენიმე შემთხვევა:

1. ვთქვათ f ფუნქცია არაუარყოფითია $[x_{i-1},x_i]$ სეგმენტზე და $S^+{}_i$-ით აღვნიშნოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=x_{i-1}, x=x_i$ წრფეებით, ox ღერძით და f ფუნქციის გრაფიკით. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$f(l_i)\Delta x_i \le S^+{}_i \le f(u_i)\Delta x_i \tag{7. 1}$$

2. ვთქვათ f ფუნქცია უარყოფითია $[x_{i-1},x_i]$ სეგმენტზე და S_i^--ით აღვნიშნოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=x_{i-1}, x=x_i$ წრფეებით, ox ღერძით და f ფუნქციის გრაფიკით. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$f(l_i)\Delta x_i \le -S_i^- \le f(u_i)\Delta x_i \tag{7. 2}$$

3. ვთქვათ f ფუნქცია ნიშანს არ ინარჩუნებს $[x_{i-1},x_i]$ სეგმენტზე. S_i^--ით აღვნიშნოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=x_{i-1}, x=x_i$ წრფეებით, ox ღერძით და f ფუნქციის გრაფიკის იმ ნაწილით, რომელიც ox ღერძის ქვევითაა, ხოლო S_i^+-ით აღვნიშნოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=x_{i-1}, x=x_i$ წრფეებით, ox ღერძით და f ფუნქციის გრაფიკის იმ ნაწილით, რომელიც ox ღერძის ზევითაა . მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$f(l_i)\Delta x_i \le S_i^+ - S_i^- \le f(u_i)\Delta x_i \quad . \tag{7. 3}$$

განსაზღვრება 7. 1. დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები აღინიშნება შესაბამისად $U(f,P)$ და $L(f,P)$-თი და განიმარტება შემდეგნაირად

$$U(f,P) = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \dots + f(l_n)\Delta x_n$$

და

$$L(f,P) = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \dots + f(u_n)\Delta x_n .$$

განსაზღვრება 7. 2. ვთქვათ P' და P'' $[a,b]$ სეგმენტის ორი დანაწილებაა. ვიტყვით, რომ P' დანაწილება წარმოადგენს P'' დანაწილების გაგრძელებას, თუ $P' \supset P''$.

შენიშვნა 7. 1. ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი ორი P' და P'' დანაწილებებისათვის არსებობს P დანაწილება, რომელიც წარმოადგენს როგორც P', ასევე P'' დანაწილებათა გაგრძელებას. მართლაც, თუ

$$P = P' \cup P''$$

მაშინ $P \supset P', P''$.

შენიშვნა 7. 2. ადვილი დასანახია, თუ P' დანაწილება წარმოადგენს P'' დანაწილების გაგრძელებას, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს:

$$L(f,P'') \le L(f,P') \le U(f,P') \le U(f,P'').$$

ამასთან შენიშვნა 7. 1-ის ძალით ნებისმიერი ორი P' და P'' დანაწილებებისათვის არსებობს P დანაწილება, რომელიც წარმოადგენს როგორც P', ასევე P'' დანაწილებათა გაგრძელებას, და მაშასადამე

$$L(f,P')\le L(f,P)\le U(f,P)\le U(f,P'').$$

დასკვნა 7. 1. დარბუს არცერთი ქვედა ჯამი არ აღემატება დარბუს არცერთ ზედა ჯამს

ინტეგრალის განმარტება. ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციაა და არსებობს ერთადერთი რიცხვი I ისეთი, რომ ნებისმიერი P დანაწილებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$L(f,P)\le I\le U(f,P).$$

მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ f $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ფუნქციაა. I რიცხვს უწოდებენ f ფუნქციის განსაზღვრულ ინტეგრალს $[a,b]$ სეგმენტზე და აღნიშნავენ სიმბოლოთი

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

მათემატიკურ ანალიზში ერთ-ერთ ფუნდამენტურ თეორემას წარმოადგენს დებულება იმის შესახებ, რომ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციას ინტეგრალის ზემოთ მოყვანილ განმარტებაში აღნიშნული თვისება აქვს, ანუ სამართლიანია:

თეორემა . $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია.

რიმანის ჯამები. ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის P დანაწილება, ე. ი.

$$P=\{x_0,x_1,...,x_n\},$$

სადაც

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

ვთქვათ $x_{i-1}\le c_i\le x_i, i=1,2,...,n$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $c=(c_1,...,c_n)$. მაშინ ჯამს

$$R(f,P,c)=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\cdots+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

უწოდებენ f ფუნქციის რიმანის ჯამს c შერჩეული წერტილებით.

ადვილი დასანახია, რომ

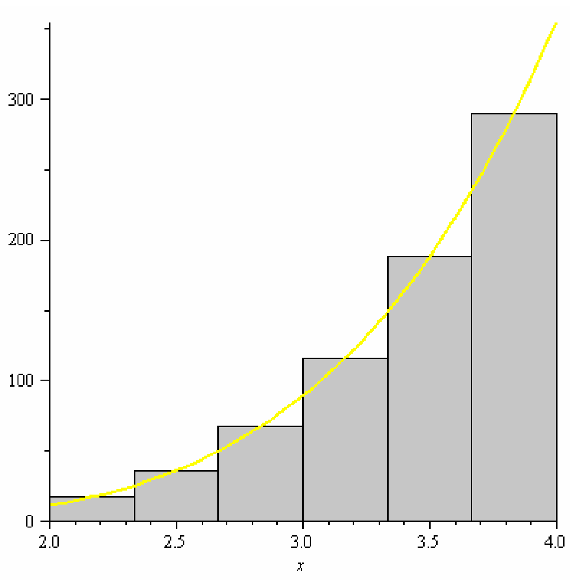
$$L(f,P)\le R(f,P,c)\le U(f,P),$$

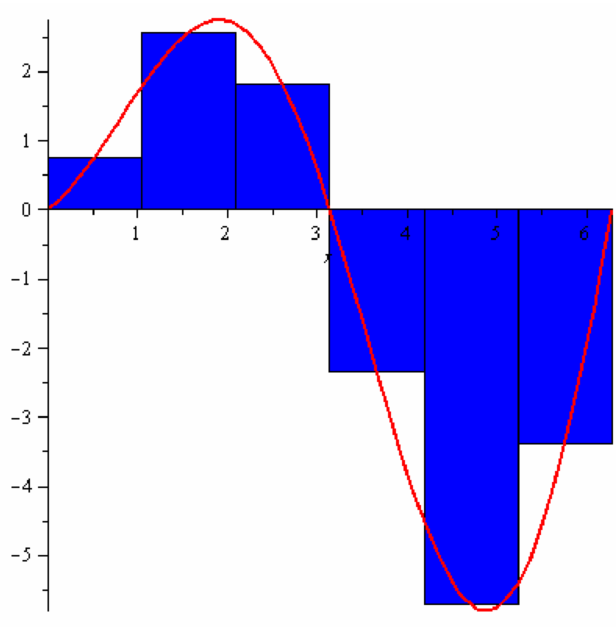
და მაშასადამე თუ ფუნქცია ინტეგრებადია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty,\|P\|\to 0} R(f,P,c)=\int_a^b f(x)\,dx$$

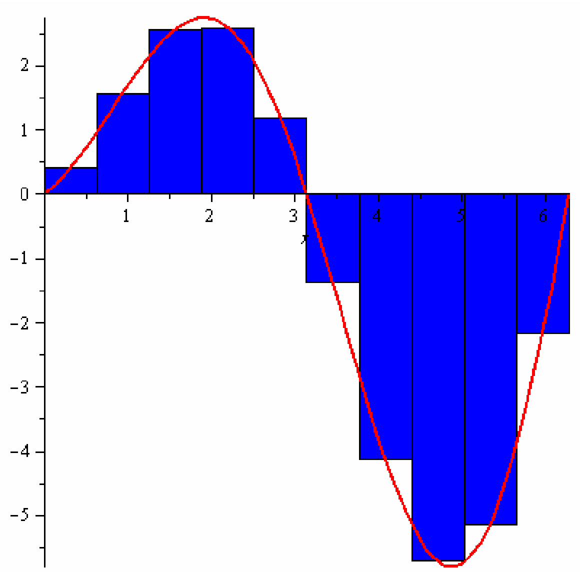
ქვემოთ მოცემულია რიმანის ჯამების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

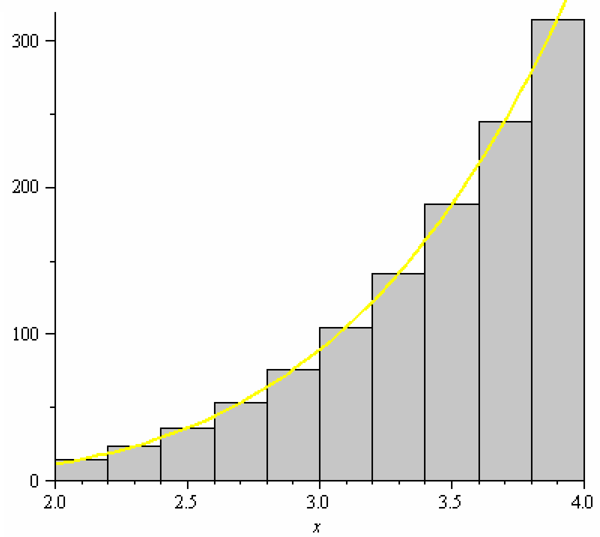
```
> with(student) :
middlebox(x^4*ln(x), x = 2..4, 6 , color= YELLOW);
middlebox(sin(x)*x + sin(x), x = 0..2*Pi, 6, shading= BLUE);
```



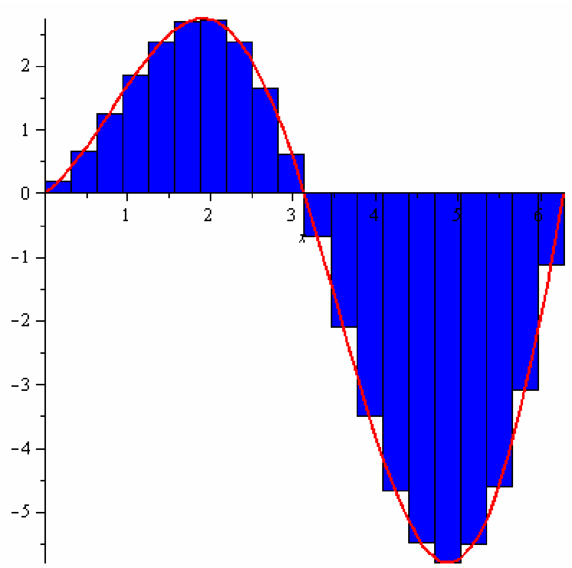


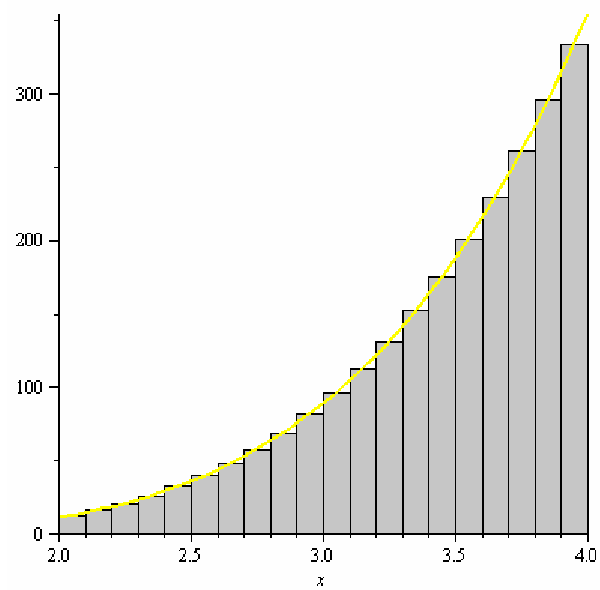
```
with(student) :
middlebox(x^4 * ln(x), x = 2 ..4, 10 , color = YELLOW);
middlebox(sin(x) * x + sin(x), x = 0 ..2 * Pi, 10, shading = BLUE);
```



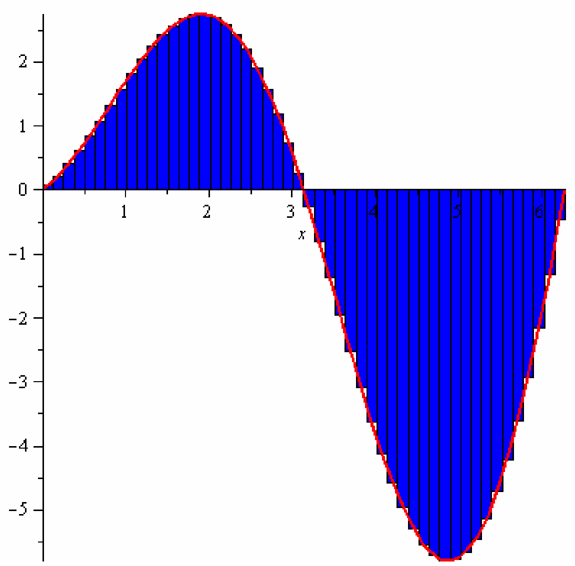


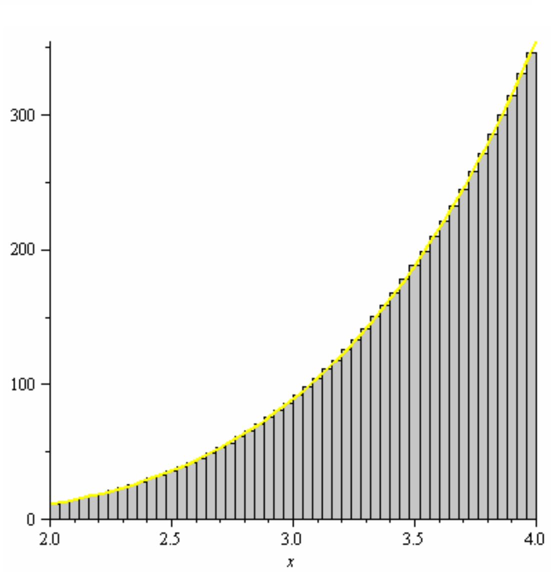
with(student) :
middlebox(x^4 * ln(x), x = 2 ..4, 20 , color= YELLOW);
middlebox(sin(x) * x + sin(x), x = 0 ..2 * Pi, 20, shading= BLUE);





```
with(student) :
middlebox(x^4*ln(x), x = 2 ..4, 50 , color= YELLOW);
middlebox(sin(x) *x + sin(x), x = 0 ..2*Pi, 50, shading= BLUE);
```

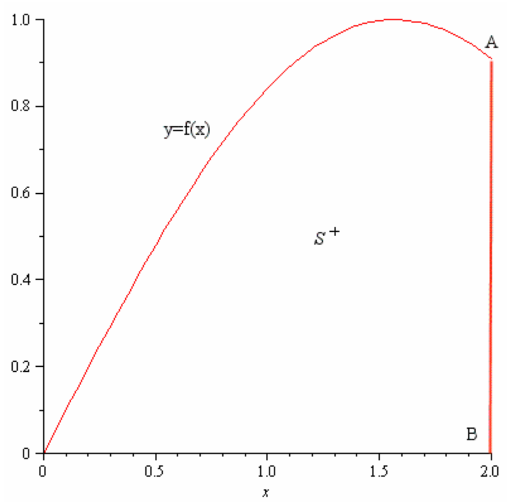




რიმანის ინტეგრალის გეომეტრიული ინტეპრეტაცია. ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი და არაუარყოფითი ფუნქციაა. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = S^+$$

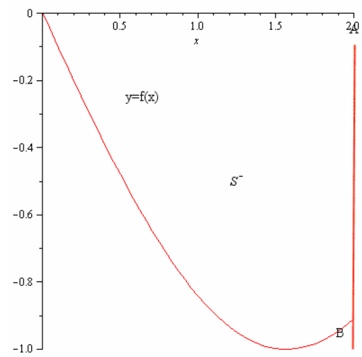
სადაც S^+ არის OAB ფიგურის ფართობი.



ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი და უარყოფითი ფუნქციაა. მაშინ

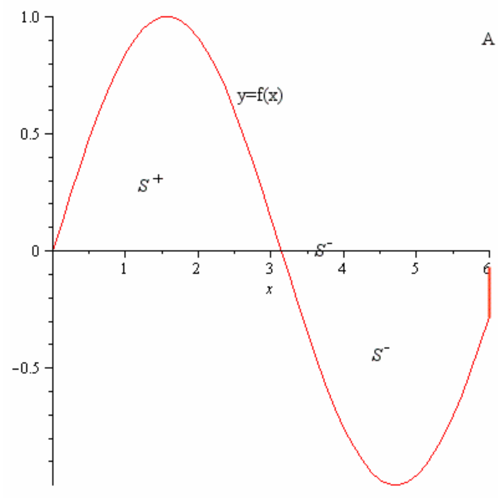
$$\int_a^b f(x)dx = -S^-$$

სადაც S^+ არის OAB ფიგურის ფართობია.



ვთქვათ f ფუნქცია ნიშანს არ ინარჩუნებს. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = S^+ - S^- .$$



რიმანის ინტეგრალის თვისებები

თვისება 1.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

მართლაც, თუ $a=b$, მაშინ $\Delta x_i = 0$ და მაშასადამე $L(f,P)=U(f,P)=0=I$.

თვისება 2. ვთქვათ, $a>b$, მაშინ

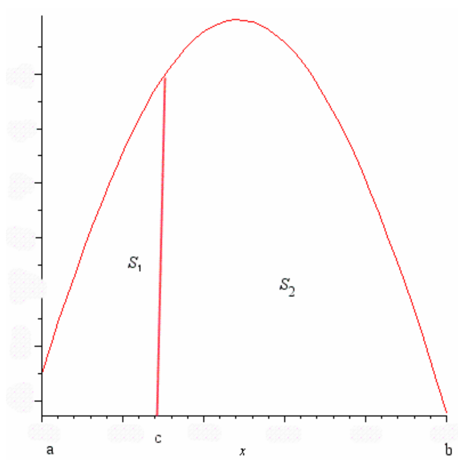
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

თვისება 3.

$$\int_a^b (Af(x)+Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx .$$

თვისება 4. ვთქვათ, $a<c<b$. მაშინ

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$



მართლაც

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

თვისება 5. ვთქვათ, $a \le b$, $f(x) \le g(x)$, $a \le x \le b$. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

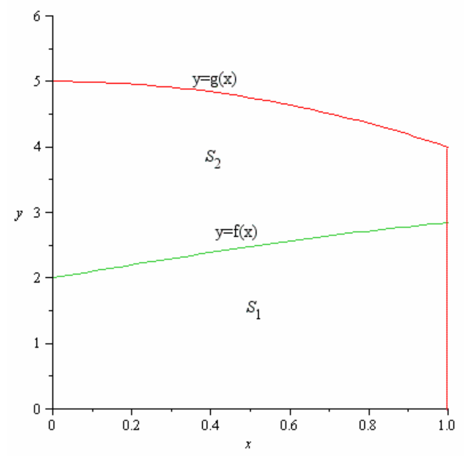
მართლაც, რადგანაც

$$S_1 \le S_2$$

და

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx, \quad S_2 = \int_a^b g(x)dx$$

მივიღებთ თვისება 5-ის დამტკიცებას.



თვისება 6. ვთქვათ, $a \le b$. მაშინ

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

მართლაც, რადგანაც

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

თვისება 6-ის ძალით გვაქვს

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

რაც ნიშნავს თვისება 6-ის დამტკიცებას.

თვისება 7. ვთქვათ f ფუნქცია კენტია $[-a,a]$ სეგმენტზე. მაშინ

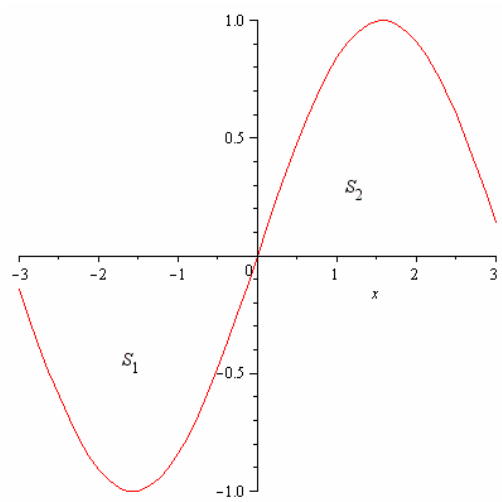
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

მართლაც,

$$S_1 = S_2$$

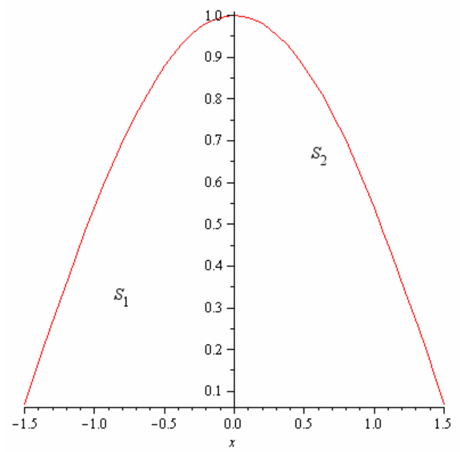
და

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = S_2 - S_1 = 0.$$



თვისება 8. ვთქვათ, f ფუნქცია ლუწია $[-a,a]$ სეგმენტზე. მაშინ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$



მართლაც,

$$S_1 = S_2$$

და

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = S_2 + S_1 = 2S_2 = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

უწყვეტი ფუნქციის თვისების ძალით არსებობს $l,u \in [a,b]$ ისეთი, რომ

$$m = f(l) \le f(x) \le f(u) = M, \quad a \le x \le b.$$

მეორეს მხრივ, $P = \{a,b\}$ დანაწილებისათვის

$$L(f,P) = m(b-a)$$

და

$$U(f,P) = M(b-a).$$

ინტეგრალის განმარტების ძალით

$$L(f,P) \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le U(f,P),$$

და მაშასადამე

$$m(b-a) \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le M(b-a),$$

$$f(l)=m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M=f(u). \qquad (7.\ 4)$$

f ფუნქციის უწყვეტობის ძალით და (7. 4)-დან მივიღებთ, რომ არსებობს $c\in[a,b]$ ისეთი, რომ

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c).$$

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 7. 1. (საშუალო მნიშვნელობის თეორემა) თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს $c\in[a,b]$ ისეთი, რომ

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

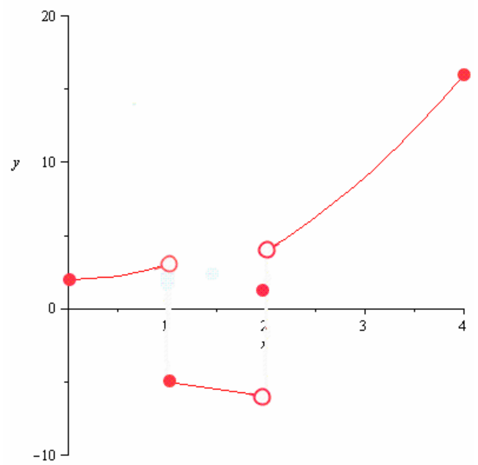
ინტეგრალის განმარტება უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებისათვის

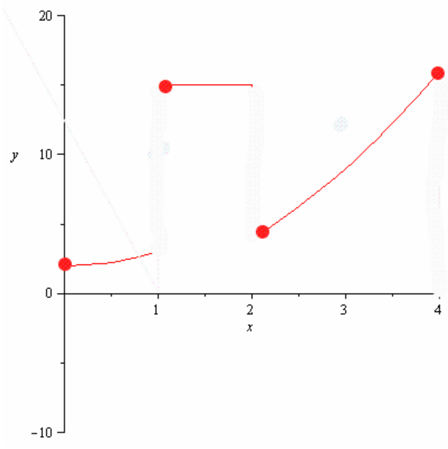
ჩვენ რიმანის ინტეგრალები განვიხილეთ უწყვეტი ფუნქციებისათვის. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ინტეგრებადობის ცნების გავრცელება უფრო ფართე ფუნქციათა კლასზე. ასეთ კლასს წარმოადგენს უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციები, ე. ი. ფუნქციები, რომელთაც გააჩნიათ სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილი. უფრო ზუსტად, შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება 7. 3. ვთქვათ $c_0<c_1<c_2<\cdots<c_n$ არის წერტილების სასრული რაოდენობა და f ფუნქცია განსაზღვრულია $[c_0,c_n]$ სეგმენტზე. f-ს ვუწოდებთ უბან-უბან უწყვეტს, თუ არსებობს $[c_{i-1},c_i]$ სეგმენტზე უწყვეტი F_i ფუნქცია, ისეთი რომ

$$f(x)=F_i(x),\quad c_{i-1}<x<c_i.$$

ქვემოთ მოცემულია უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციების მაგალითები.





განსაზღვრება 7. 4. ვთქვათ, f უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა $[c_0, c_n]$ სეგმენტზე. მაშინ f ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[c_0, c_n]$ სეგმენტზე განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)\,dx .$$

შენიშვნა 7. 1. როგორც ზემოთ ვნახეთ, სეგმენტზე უწყვეტი ან უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია. რაც შეეხება შემოსაზღვრულობას, ის არის მხოლოდ აუცილებელი პირობა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყველა შემოსაზღვრული ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი.

კალკულუსის ძირითადი თეორემები

თეორემა 7. 2 (ძირითადი თეორემა I) ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და $a \le x \le b$. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt .$$

მაშინ F წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(x)=f(x).$$

დამტკიცება. წარმოებულის განმარტების ძალით გვაქვს

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$ (თვისება 5-ის ძალით)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}hf(c)$$ (საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით)

$$=f(x)$$ (ფუნქციის უწყვეტობის ძალით).

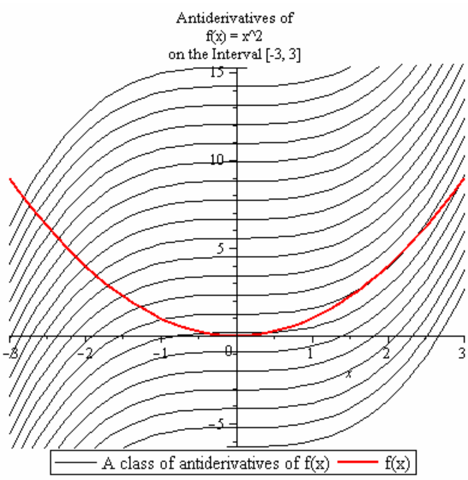
F ფუნქციას უწოდებენ f ფუნქციის პირველყოფილს. ე. ი.

განსაზღვრება 7. 5. F ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის პირველყოფილი რაიმე შუალედზე, თუ ამ შუალედზე F ფუნქცია წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას $F'(x)=f(x)$, რაც ტოლფასია $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$ ტოლობის.

თეორემა 7. 3. თუ F_1 და F_2 ფუნქციები f ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციებია რაიმე ერთი და იგივე შუალედზე, მაშინ მათი სხვაობა იქნება მუდმივი ამ შუალედზე, ანუ $F_1(x)-F_2(x)=c$ ყოველი x-ისთვის ამ შუალედიდან.

მართლაც, ვინაიდან $F_1'(x)=f(x)$ და $F_2'(x)=f(x)$, ამიტომ $(F_1(x)-F_2(x))'=0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $F_1(x)-F_2(x)$ სხვაობა მუდმივია.

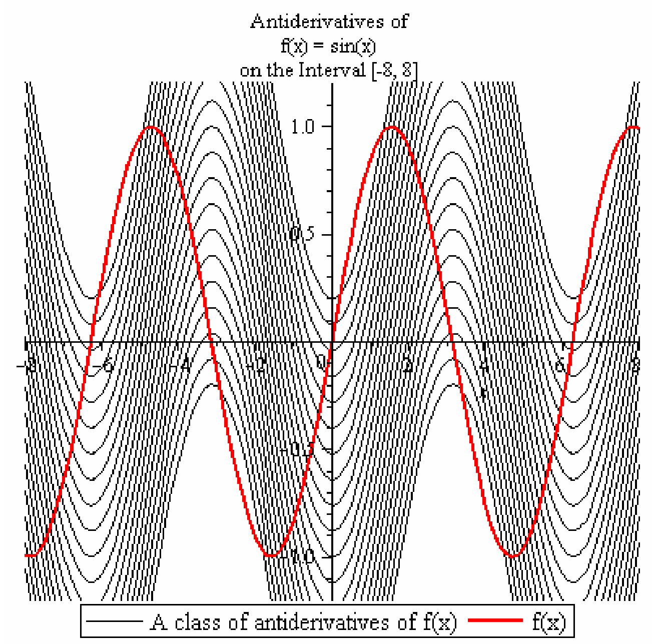
შედეგი 7. 1. თუ F ფუნქცია არის f ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია რაიმე ერთი და იგივე, მაშინ $\{F+c:c\in R\}$ ფუნქციათა ოჯახი არის f ფუნქციის პირველყოფილი



მაგალითი 7. 1. რადგანაც $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, ამიტომ $\frac{x^3}{3}+c$ ფუნქციათა ოჯახი წარმოადგენს x^2 ფუნქციის პირველყოფილს.

მაგალითი 7. 2. რადგანაც $(\sin(x))' = \cos(x)$, ამიტომ $\{\cos(x)+c : c \in R\}$ ფუნქციათა ოჯახი არის $\sin(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი.

```
> with(Student[Calculus1]) :
AntiderivativePlot( sin(x), x =-8 ..8, showclass, showantiderivative
    = false, functionoptions = [thickness = 2], classoptions = [color
    = black]);
```



თეორემა 7. 4 (ძირითადი თეორემა II, ნიუტონ-ლაიბნიცი) ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და F წარმოადგენს f ფუნქციის პირველყოფილს, მაშინ

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

დამტკიცება. რადგანაც F ფუნქცია არის f ფუნქციის პირველყოფილი, ამიტომ $F+c$ ფუნქციაც იქნება f ფუნქციის პირველყოფილი და მაშასადამე თეორემა 7. 2-ის ძალით

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+c\,.$$

ვთქვათ $x=a$. მაშინ

$$0=\int_a^a f(t)dt = F(a)+c\,,$$

$$c=-F(a)\,.$$

მაშასადამე,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)\,.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

პირველყოფილი ფუნქციის ცნება. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება

განსაზღვრება 7. 6. განუსაზღვრელი ინტეგრალი f ფუნქციიდან აღინიშნება

$$\int f(x)dx$$

სიმბოლოთი და ეწოდება f ფუნქციის ნებისმიერ პირველყოფილს მოცემულ შუალედზე.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ F ფუნქცია f ფუნქციის რაიმე პირველყოფილია მოცემულ შუალედზე, მაშინ ამ შუალედზე

$$\int f(x)dx = F(x)+c\,, \qquad (7.\ 5)$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

თუ $F'(x)=f(x)$, მაშინ (7. 5)-დან მივიღებთ:

$$d(\int f(x)dx) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx\,.$$

ასევე გვექნება:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+c$$

ძირითადი განუსაზღვრელი ინტეგრალების ცხრილი

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$, სადაც $\alpha \neq -1$;

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$;

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, სადაც $a > 0, a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + c$;

4. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

5. $\int \cos x dx = \sin x + c$;

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$; 7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$;

8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c_1; \end{cases}$ 9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} arctgx + c, \\ -arcctgx + c_1; \end{cases}$

- 63 -

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c$; 11. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის წრფივობის თვისება

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx, \quad \text{სადაც } \alpha, \beta \in R. \qquad (2)$$

მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველყოფილია $F(x)$ ფუნქცია, ხოლო $g(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველყოფილია $G(x)$ ფუნქცია, მაშინ

$$\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \alpha c_1 + \beta c_2 = \alpha F(x) + \beta G(x) + c,$$

მაგრამ $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$, ამიტომ სამართლიანია (2) ტოლობა.

მაგალითები 7. 3.

1) $\int (x + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx = \int (x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}) dx = \int x^2 dx + 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 +$

$+ \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + c$.

მაგალითები 7. 4

2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx =$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + c$.

ცვლადის გარდაქმნა განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის

თუ ვეძებთ პირველყოფილს $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ სახის ფუნქციიდან, მაშინ ვიყენებთ $\varphi(x)=t$ ცვლადის გარდაქმნას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ და პირველყოფილი ფუნქციის პოვნის შემდეგ ვუბრუნდებით საწყის x ცვლადს:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt = F(t)+c = F(\varphi(x))+c}$$

მაგალითები. 7. 5

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}dx^2 = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c;$$

მაგალითი 7. 6.

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c;$$

მაგალითი 7. 7.

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x) = -\ln|\cos x| + c.$$

3. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის

სამართლიანია ტოლობა:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

მართლაც, ვინაიდან $\int (f(x)g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$, ამიტომ

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\int (f(x)g(x))'dx = f(x)g(x)+c$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, მივიღებთ:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

დამტკიცებული ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახითაც:

$$\boxed{\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)}.$$

შენიშვნა 7. 2. დამტკიცებულ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულაში მარცხენა და მარჯვენა მხარეების ტოლობა გაიგება მუდმივის სიზუსტით, ვინაიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალი განიმარტება მუდმივის სიზუსტით.

ეს შენიშვნა ეხება ყველა იმ ტოლობასაც, რომლის ორივე მხარეში განუსაზღვრელი ინტეგრალი მონაწილეობს.

მაგალითები: 1) $\int x\cos x dx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int \sin x\cdot(x)'dx=x\sin x-\int \sin x dx=$
$=x\sin x+\cos x+c$;

2) $\int x^2e^x dx=\int x^2 de^x=x^2e^x-\int e^x dx^2=x^2e^x-2\int xe^x dx=x^2e^x-2\int x de^x=$
$=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$;

3) $\int \ln x dx=x\ln x-\int x d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+c$;

4) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x d\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx=$

$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$

$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+\int\frac{a^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right)=$

$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\quad a>0$,

საიდანაც მივიღებთ

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c.$$

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ f ფუნქციის დარბუს ზედა და ქვედა ინტეგრალური ჯამები მითითებული შუალედის n ტოლ ნაწილად დანაწილების შემთხვევაში. განიხილეთ შემთხვევები: 1) $n=2$; 2) $n=3$; 3) $n=4$; 4) $n=5$.

1. ა) $f(x)=x$, $x\in[1;2]$; ბ) $f(x)=2x+1$, $x\in[0;5]$;
   გ) $f(x)=3x-2$, $x\in[1;4]$; დ) $f(x)=-x+4$, $x\in[2;3]$.
2. ა) $f(x)=x^2$, $x\in[1;2]$; ბ) $f(x)=2x^2-1$, $x\in[-3;0]$;
   გ) $f(x)=x^2-2x$, $x\in[2;3]$; დ) $f(x)=-x^2-x$, $x\in[0;2]$.

ჩაწერეთ f ფუნქციის დარბუს ზედა და ქვედა ინტეგრალური ჯამები მითითებული შუალედის n ტოლ ნაწილად დანაწილების შემთხვევაში:

1. ა) $f(x)=x+1$, $x\in[2;3]$; ბ) $f(x)=2x+1$, $x\in[-3;0]$;

გ) $f(x)=\frac{1}{4}x-2$, $x\in[-2;2]$; დ) $f(x)=-x+\frac{1}{2}$, $x\in[0;6]$

2. ა) $f(x)=x^2-1$, $x\in[1;3]$; ბ) $f(x)=x^2+4x$, $x\in[2;3]$;

   გ) $f(x)=\sqrt{x}+2$, $x\in[0;1]$; დ) $f(x)=x^3+1$, $x\in[-2;3]$.

გამოთვალეთ f ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამები მითითებული შუალედის n ტოლ ნაწილად დანაწილების გზით. c_i $(i=0,1,2,...,n-1)$ არგუმენტის მნიშვნელობებად აარჩიეთ დანაწილების შუალედების შუაწერტილები. განიხილეთ შემთხვევები: 1) $n=2$; 2) $n=3$; 3) $n=4$; 4) $n=5$.

1. ა) $f(x)=x+1$, $x\in[-1;3]$; ბ) $f(x)=3x+2$, $x\in[2;3]$;

   გ) $f(x)=-x+2$, $x\in[1;2]$; დ) $f(x)=\frac{1}{2}x-2$, $x\in[0;4]$.

2. ა) $f(x)=x^2$, $x\in[0;2]$; ბ) $f(x)=x^2+2x$, $x\in[2;3]$;

   გ) $f(x)=-x^2+1$, $x\in[-3;-1]$; დ) $f(x)=x^3$, $x\in[0;1]$.

გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი, როგორც რიმანის ინტეგრალური ჯამების ზღვარი. ამისათვის მითითებული შუალედი დაანაწილეთ n ტოლ ნაწილად და c_i $(i=0,1,2,...,n-1)$ არგუმენტის მნიშვნელობებად აარჩიეთ დანაწილების შუალედების შუაწერტილები:

ა) $\int_{-1}^{1}(x+3)dx$; ბ) $\int_{0}^{2}(4x+3)dx$;

გ) $\int_{-1}^{2}x^2dx$; დ) $\int_{1}^{2}(x^2-2x)dx$.

იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

1. ა) $\int xdx$; ბ) $\int(x+2)dx$;

   გ) $\int(-2x+3)dx$; დ) $\int(\frac{1}{4}x-5)dx$.

2. ა) $\int(x^2-2x+1)dx$; ბ) $\int(2x^3-3x^2+x-2)dx$;

   გ) $\int(2x^5-x^3+2x^2-1)dx$; დ) $\int(-5x^3-x+\frac{1}{3})dx$.

3. ა) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x})dx$; ბ) $\int(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{x^2})dx$;

   გ) $\int x(\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}+\sqrt[4]{x}+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}+4)dx$; დ) $\int(2x\sqrt[3]{x}-x^2)(\sqrt{x}-1)dx$.

4. ა) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$; ბ) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$;

გ) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$; დ) $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

5. ა) $\int (2\sin x+3\cos x-5)dx$; ბ) $\int (\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+2)dx$;

გ) $\int \tan^2 xdx$; დ) $\int \cot^2 xdx$.

6. ა) $\int (\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})dx$; ბ) $\int (\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{3}{2x^2-2})dx$;

გ) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; დ) $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$.

7. ა) $\int (e^x-2^x)dx$; ბ) $\int (2^{2x}+e^{3x})dx$;

გ) $\int \frac{2^{x+2}-3^{x-2}}{6^x}dx$; დ) $\int (2^x+3^x)^2 dx$.

იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი ცვლადის გარდაქმნის გზით:

1. ა) $\int (2x-1)^{20} dx$; ბ) $\int (\frac{1}{3}x-5)^{10} dx$;

გ) $\int \sqrt{3x-2}dx$; დ) $\int \sqrt[3]{4x-2}dx$.

2. ა) $\int \frac{1}{\sqrt{2-9x^2}}dx$; ბ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$;

გ) $\int \frac{1}{2-3x^2}dx$; დ) $\int \frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}dx$.

3. ა) $\int (\cos 2x-\sin(3x+2))dx$; ბ) $\int (\frac{4}{\cos^2(4x-3)}+\frac{1}{1-\cos x})dx$;

გ) $\int (\frac{1}{1+\sin x}-\frac{1}{2x^2+1})dx$; დ) $\int (\sin^4 x-\cos^4 x)dx$.

4. ა) $\int \tan xdx$; ბ) $\int \cot xdx$;

გ) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$; დ) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

5. ა) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; ბ) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$;

გ) $\int \frac{x^3dx}{x^8-5}$; დ) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

6. ა) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$; ბ) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;

გ) $\int \frac{dx}{\sin x}$; დ) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

7. ა) $\int x(1-x)^{50}dx$; ბ) $\int x\sqrt{3-4x}dx$;

გ) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$; დ) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.

იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების გზით:

1. ა) $\int x\sin xdx$; ბ) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$;

გ) $\int x\cos 3xdx$; დ) $\int x\cos\frac{x}{4}$.

2. ა) $\int xe^{x}dx$; ბ) $\int xe^{2x}dx$;

გ) $\int xe^{-x}$; დ) $\int x\ln xdx$.

3. ა) $\int x^2e^{-2x}dx$; ბ) $\int x^2\cos xdx$;

გ) $\int x^2\sin 2xdx$; დ) $\int x^2\cos 4xdx$.

4. ა) $\int \arctan xdx$; ბ) $\int \arcsin x$;

გ) $\int \arctan\sqrt{x}dx$; დ) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

5. ა) $\int \sqrt{4-x^2}dx$; ბ) $\int \sqrt{9+x^2}dx$;

გ) $\int e^{x}\cos xdx$; დ) $\int e^{2x}\sin 3xdx$.

გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

1. ა) $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$; ბ) $\int_{-1}^8 (\sqrt[3]{x}+2x-1)dx$;

გ) $\int_0^{\pi} (3\cos x-2\sin x)dx$; დ) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$.

2. ა) $\int_0^2 |1-x|dx$; ბ) $\int_2^4 |x-3|dx$;

გ) $\int_{-1}^1 (|x|+2x)dx$; დ) $\int_{-2}^1 (x|x|-1)dx$.

3. ა) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$; ბ) $\int_0^{\pi} x\sin xdx$;

გ) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} x|\cos x|dx$; დ) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx$.

გამოთვალეთ $\int_{-1}^2 f(x)dx$, თუ:

ა) $f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0, \\ 2x-1, & 0\le x<1, \\ x^3+3, & 1\le x\le 2. \end{cases}$; ბ) $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\le x<0, \\ 2x+3, & 0\le x<1, \\ x^2+1, & 1\le x\le 2. \end{cases}$;

გ) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<0, \\ e^x, & 0\le x<1, \\ \sqrt{x}+3, & 1\le x\le 2. \end{cases}$; დ) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & -1\le x<0, \\ 3^x, & 0\le x<1, \\ 4\sqrt{x}, & 1\le x\le 2. \end{cases}$.

გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით:

1. ა) $y = x,\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 3;$

ბ) $y = x^3,\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 2;$

გ) $y = -x^4,\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 2;$

დ) $y = e^x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = \ln 5.$

2. ა) $xy = -4\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 3;$

ბ) $y = \sin x,\quad y = 0,\quad 0 \le x \le \pi;$

გ) $y = 2^x,\quad y = 2x - x^2,\ x = 0,\ x = 2;$

დ) $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 2\ ;$

3. ა) $y = x^2,\quad y = \sqrt[3]{x};$

ბ) $y = -x^2,\quad y = x^2 - 2x;$

გ) $y = 6x - x^2\ ,\quad y = 0;$

დ) $y = \frac{5}{x},\ y = 6 - x.$

4. ა) $y = 2x - 1,\quad y = 0,\ -1 \le x \le 4;$

ბ) $y = x^3,\ y = 0,\ -1 \le x \le 2;$

გ) $y = 2x - x^2,\quad y = 0,\ -1 \le x \le 4;$

დ) $y = \sin x,\quad y = 0,\quad -\frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}.$